ПетрГУ

Дифференциал функции

Должность: Студент
Дилба К. М.,
гр. 22101

Содержание

Дифференциал функции

Теорема

Для того чтобы функция f была дифференцируема в некоторой точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке производную, причем в этом случае

$$dy = f'(x_0)dx \tag{1}$$

Доказательство необходимости.

Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A$. Поэтому производная $f'(x_0)$ существует и равна A. Отсюда $dy = f'(x_0)dx$.

Доказательство достаточности

Пусть существует производная $f'(x_0)$, т.е. существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + e(\Delta x),$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} e(\Delta x) = 0$, и для $x \neq 0$.

Доказательство достаточности

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + e(\Delta x)\Delta x, \tag{2}$$

и так как $e(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x)$, то наличие равенства (2) и означает дифференцируемость функции f в точке x_0.

Теорема доказана

Наклонная касательной к графику функции

Определение

Если существует предел $\lim_{h \to 0} k(h) = f'(x_0)$, то прямая

$$y = k_0(x - x_0) + y_0, \qquad (3)$$

которая получается из прямой $y = k(h)(x - x_0) + y_0$ при $h \to 0$, называется наклонной касательной к графику функции f в точке (x_0, y_0).

Правила вычисления производных

Пусть функции $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ имеют производные в точке x_0, тогда их сумма $y_1 + y_2 = f_1(x) + f_2(x)$ также имеет в точке x_0 производную и

$$(y_1 + y_2)' = y_1' + y_2'. \tag{4}$$

Таким образом, производная суммы функций равна сумме производных.