Сходимость дискретных моделей алгоритма AIMD к кусочно-линейному случайному процессу

О. Ю. Богоявленская

Петрозаводский Государственый Университет,
olbgvl@cs.karelia.ru

Роль протокола TCP

- Парадигма распределенного управления в сетях пакетной коммутации
- Transmission Control Program, 1974.
- Коллапс производительности
- Средние важнее дисперсий

Роль протокола TCP

- Новые приложения
- TCP vs UDP
- Проблема загрузки высокопроизводительных каналов
- Best effort vs QoS guarantees

Два подхода к моделированию протокола TCP

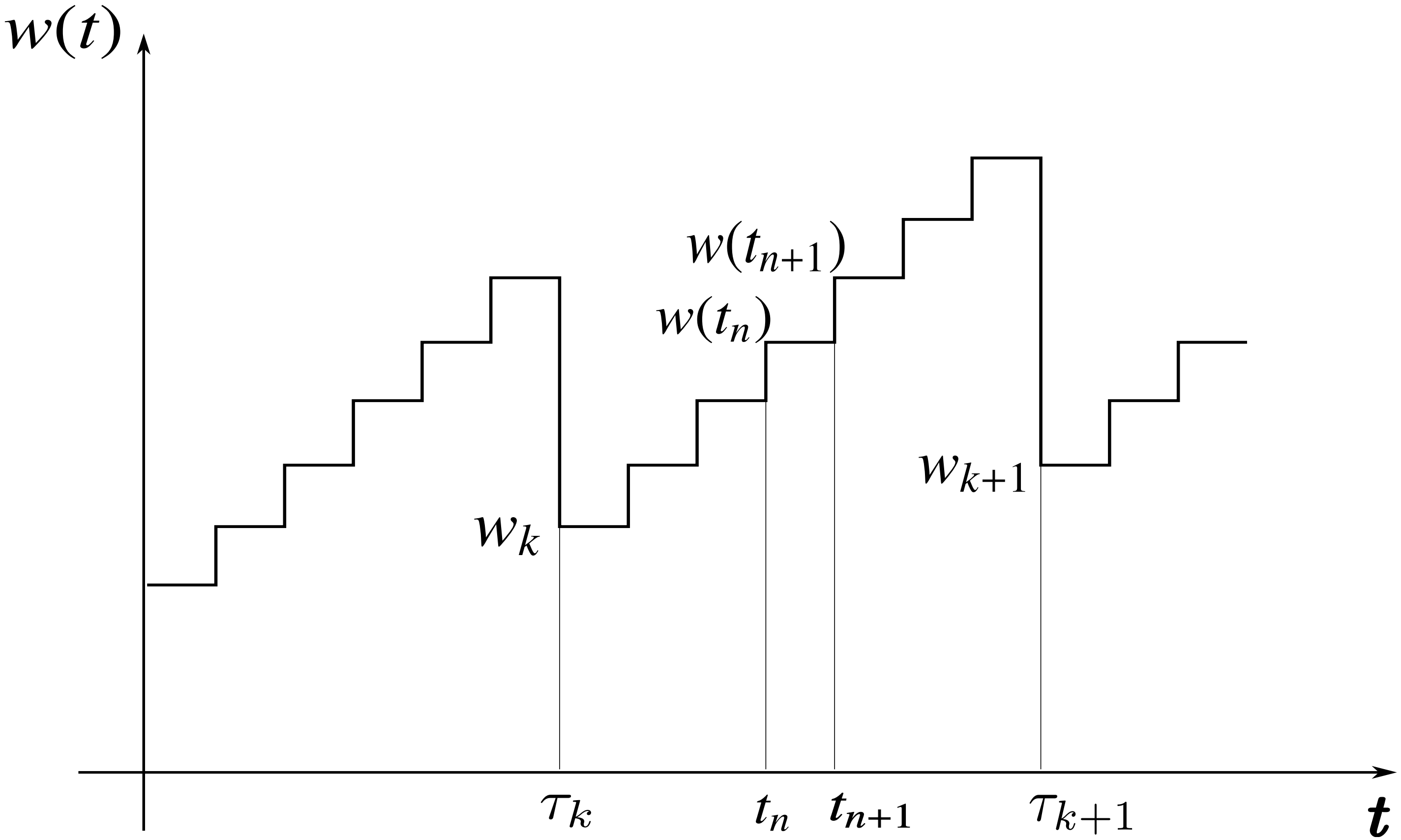

Рис. 1: ступенчатый случайный процесс

Два подхода к моделированию протокола TCP

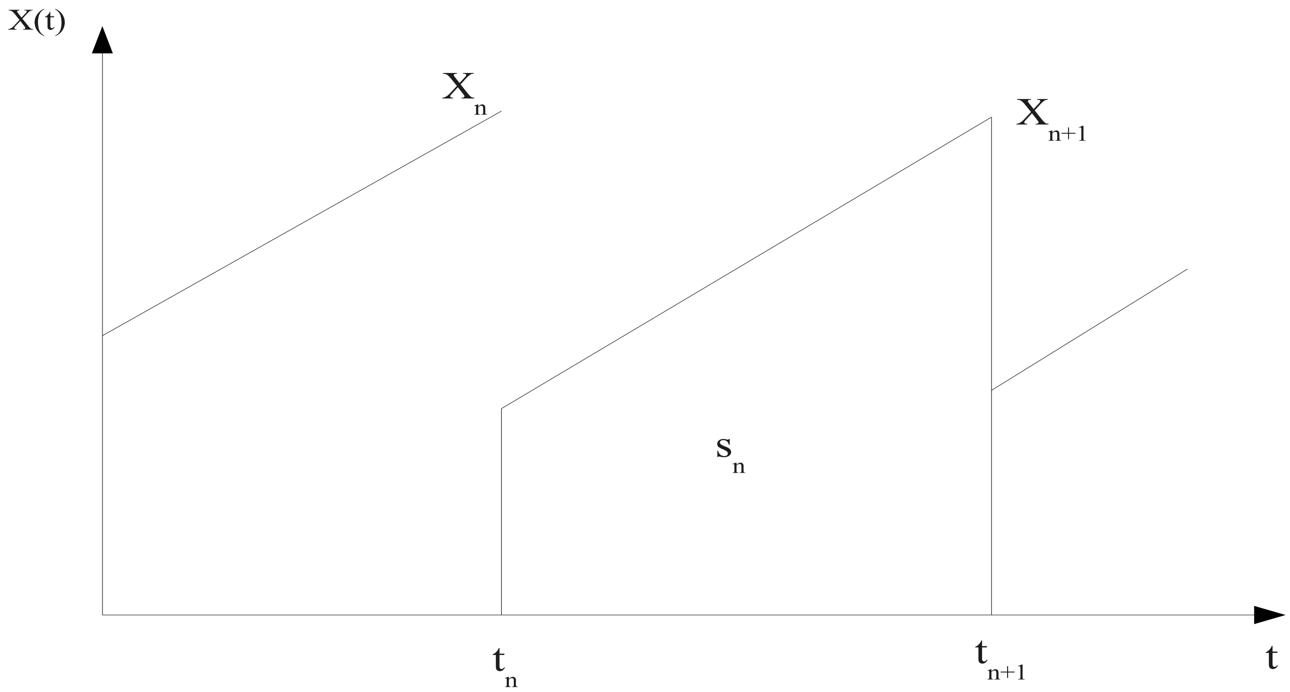

Рис. 2: Кусочно-линейный случайный процесс

Определения

Пусть t_n — окончания раундов TCP
$[t_{n-1}, t_n]$ RTT и
$\xi_n = t_n - t_{n-1}$ длительность RTT.
Обозначим $w(t)$ — размер cwnd.
Определим ступенчатый процесс $\{w(t)\}$ такой что

$$w(t_n + 0) = \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{w(t_n)}{\alpha} \right\rfloor, & \text{если на } [t_{n-1}, t_n] \\ & \text{были потери TCP,} \\ w(t_n) + 1, & \text{если данные доставлены.} \end{cases}$$

Между моментами t_n процесс $\{w(t)\}$ остается постоянным.

Определения

Пусть $\{X(t)\}_{t>0}$ принимает значения из $\mathbb{R}^+$ и

на интервалах $[\theta_n, \theta_{n+1})$ $n = 0, 1, \ldots$ возрастает линейно со скоростью $b = \mathsf{E}[\xi_n]^{-1}$, т. е. $X(t) = X(t_0) + bt,\ \forall\ [t_0, t] \subset [\theta_n, \theta_{n+1})$.

В случайный моменты времени $\{\theta_n\}_{n\geq 0}$ процесс $\{X(t)\}_{t>0}$ совершает скачок $X(\theta_n + 0) = X(\theta_n)/\alpha$, где $\alpha > 1$.

Последовательность $\{\theta_n\}_{n\geq 0}$ образует пуассоновский поток с параметром $0 < \lambda < \infty$.

Сходимость

Определим следующее преобразование координат $\{w(t)\}$

$$t = ns \qquad w = \lfloor nX \rfloor. \tag{1}$$

Рассмотрим последовательность ступенчатых процессов $w_n(s) = w(ns)$: $\lambda_n = \lambda/n$. Обозначим $w_n(0) = \lfloor nx_0 \rfloor$ и $X(0) = x_0$.

Теорема 1 $\forall$ s *имеет место*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{w(ns)}{n} = X(s) \tag{2}$$

по распределению и $b = \left[\int\limits_0^\infty x dR(x)\right]^{-1}$.

Доказательство

Рассмотрим период роста $X(s)$. Для интервала $[s_1, s_2], \subset [\theta_n, \theta_{n+1}]$ имеет место $X(s) = X(s_1) + b(s - s_1)$.

Обозначим $u_n(s, s_1)$число моментов t_m, попавших в интервал $[ns_1, ns]$. Последовательность $\{t_k\}_{m=1}^{\infty}$ образует процесс восстановления и согласно теореме Симта

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{E}[u_n(s, s_1)]}{n(s - s_1)} = b \tag{3}$$

Тогда, согласно неравенству Чебышева

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n(s, s_1)}{n} = b(s - s_1) \tag{4}$$

по вероятности.

Доказательство

Обозначим $w_{n,k} = w_n(\tau_k - 0)$ и $j_{n,k} = u_n(\sigma_{n,k}, \sigma_{n,k-1})$, где $\tau_k = n\sigma_{n,k}$.

$$w_{n,k} = \left\lfloor \frac{w_{n,k-1}}{\alpha} \right\rfloor + j_{n,k} = \frac{w_{n,k-1}}{\alpha} - \gamma_{n,k} + j_{n,k}, \tag{5}$$

где $0 \le \gamma_{n,k} < 1$.

Интервал$\tau_k - \tau_{k-1} = n(\sigma_{n,k} - \sigma_{n,k-1}) = \pi_k + \delta_k$, где $\eta_k = \pi_k/n$, имеет распределение $F_{\eta_k}(x) = 1 - e^{-\lambda s}$,
и r.v. δ_k/n сходятся по распределению к нулю.

следовательно

$$\lim_{n\to\infty}(\sigma_{n,k} - \sigma_{n,k-1}) = \eta_k. \tag{6}$$

по распределению.

Доказательство

Пусть $n\theta'_n$ — момент последнего скачка $w_n(s)$ перед моментом ns, ν_n — его номер и $w_n(0) = j_0^n$. тогда

$$w_n(s) = \frac{1}{\alpha}\left[\sum_{i=0}^{\nu_n} \frac{j_{n,\nu_n-i}}{\alpha^i} - \sum_{i=0}^{\nu_n} \frac{\gamma_{n,\nu_n-i}}{\alpha^i}\right] + u_n(s-\theta'_n). \qquad (7)$$

Из (6) следует, что $\nu_n \to \nu$, по распределению и ν удовлетворяет распределению Пуассона.

При этом $\theta'_n \to \theta'$ также по распределению и θ' момент последнего скачка процесса $X(s)$ перед моментом времени s. следовательно

$$\lim_{n\to\infty} \frac{w(ns)}{n} = \frac{b}{\alpha}\sum_{i=0}^{\nu} \frac{\eta_{\nu-i}}{\alpha^i} + b(s-\theta') = X(s) \qquad (8)$$

по распределению, где $\eta_0 = x_0$.

Заключение

В рамках двух основных существующих подходов к моделированию алгоритма AIMD

- построена последовательность ступенчатых случайных процессов;
- доказана ее сходимость по распределению к кусочно-линейному случайному процессу.
- Направление дальнейших исследований: изучение скорости сходимости.