Лабораторная **работа № 2**

Решение систем линейных алгебраических уравнений

Тема: Решение системы линейных алгебраических уравнений прямым и итерационным методами.

Задание**:**

1. Найти решение системы $Ax = b$ (вычисляя в MathCAD обратную матрицу A^{-1}) по формуле $x^* = A^{-1} \cdot b$ <u>или</u> применяя встроенную функцию **lsolve**, реализующую метод Гаусса.
2. Найти приближенное решение системы заданным итерационным методом с точностью 10^{-10}.
3. Получить матрицу перехода итерационного метода *S*. Проверить достаточное условие сходимости $\| S \| < 1$ (используя встроенные функции вычисления нормы матрицы)
4. Исследовать зависимость погрешности приближенного решения ε_k .от номера итерации *k*, при фиксированном начальном приближении (построить график).

Итерационные методы (каноническая форма):

1. **метод Якоби**

$$D \cdot \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{1} + A \cdot x^{(k)} = b, \quad k = 0,1,\ldots,\tau = 1,$$ где $D = (a_{ij}\delta_i^j)$ - диагональная матрица.

2. **метод Зейделя**

$$(D + A^-) \cdot \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{1} + A \cdot x^{(k)} = b$$, где $A^- = (a_{ij}^-)$, $a_{ij}^- = \begin{cases} a_{ij}, i > j \\ 0, i \le j \end{cases}$ - нижняя треугольная матрица,

3. **метод релаксации**

$$(D + \omega \cdot A^-) \cdot \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\omega} + A \cdot x^{(k)} = b,$$ $0<\omega<2$ - параметр релаксации

4. **метод простых итераций**

$$\frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau} + Ax^{(k)} = b,$$ $0<\tau<\frac{2}{\|A\|}$ - итерационный параметр

5. **метод минимальных невязок**

$$\frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau_{k+1}} + A \cdot x^{(k)} = b$$ параметр $\tau_{k+1} = \frac{(r^k, Ar^k)}{(Ar^k, Ar^k)}$, где

$r^k = A \cdot x^k - b$ - невязка

Матрица системы определяется формулой

$A = D + k \cdot C$

$$D = \begin{pmatrix} 1.342 & 0.432 & -0599 & 0.202 \\ 0.202 & 1.342 & 0.432 & -0.599 \\ -0.599 & 0.202 & 1.342 & 0.432 \\ 0.432 & -0.599 & 0.202 & 1.342 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0.02 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.02 \end{pmatrix}$$

k - номер варианта задания.

$$b = \begin{pmatrix} 1.941 \\ -0.230 \\ -1.941 \\ 0.230 \end{pmatrix}$$

В приложении 2 в качестве примера приведена копия MathCAD-документа, в котором для решения системы $Ax = b$ использована функция **lsolve** и реализован алгоритм метода простых итераций.

Построен график погрешности.

Для проверки выполнения условий сходимости , используя встроенные функции, вычислены нормы матрицы перехода и ее собственные числа.