4. Методы приближенного решения задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

4.1. Задача Коши для ОДУ

4.1.1. Постановка задачи. Сведение к системе ОДУ 1-го порядка

Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) используются в качестве математических моделей в различных областях (физика, механика, химическая кинетика, экология, биология и др.). Конкретная прикладная задача может приводить к уравнению любого порядка или к системе уравнений. Но ОДУ порядка p

$$u^{(p)}(x) = f\left(x, u, u', \ldots, u^{(p-1)}\right)$$

можно заменой

$$u^{(k)}(x) = v_k(x), \;\; 0 \le k \le p-1$$

свести к эквивалентной системе p уравнений 1-го порядка

$$\begin{cases} v_k'(x) = v_{k+1}(x) \\ \\ v_{p-1}'(x) = f\left(x, v_0, v_1, \ldots, v_{p-1}\right) \end{cases} \quad , \;\; 0 \le k \le p-2$$

Аналлогично произвольную систему дифференциальных уравнений любого порядка, разрешенных относительно старших производных, можно заменить системой уравнений 1-го порядка. ОДУ порядка p или система из p уравнений 1-го порядка имеют множество решений, в общем случае зависящее от p произвольных параметров. Для их определения надо задать p дополнительных условий на неизвестные функции. Дифференциальное уравнение вместе с дополнительными условиями называют "задачей". Можно выделить три типа задач: задачи Коши, краевые задачи и задачи на собственные значения.

Пусть $u'(x) = f(x,u)$ - система из p уравнений 1-го порядка в векторной форме, т.е. $u(x): \Re \to \Re^p, f(x,u): \Re^{p+1} \to \Re^p$. Тогда задачей Коши называется задача поиска решения $u(x)$, определенного на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяющего начальному условию $u(x_0) = u_0$, $x_0 \in [a,b]$. Если $f(x,u)$ - непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по u в области $G \subset \Re^{p+1}$, то решение задачи Коши существует и единственно в некоторой окрестности x_0 $\forall (x_0, u_0) \in G$. Кроме того, если $f(x,u)$ - непрерывно дифференцируема до порядка q, то решение имеет непрерывную производную порядка $q+1$. Задача Коши допускает точное решение через элементарные функции или в квадратурах (через неопределенные интегралы) только в иключительных случаях. Приближенные методы решения можно разделить на приближнно-аналитические и численные. В приближенно-аналитических методах строится последовательность функций (выражающихся через элементарные функции или через интегралы), сходящаяся к точному решению. Элементы последовательности могут использоваться как приближенные решения. Численные методы - это алгоритмы вычисления приближенных значений решения в отдельных точках (на выбранной сетке значений аргумента). В таком случае приближенное решение получается в виде таблицы.

4.2. Одношаговые методы численного решения

4.2.1. Классификация численных методов для задачи Коши

Рассмотрим разбиение отрезка $\left[x_0, b\right]$ на n интервалов точками $x_1, x_2, \ldots, x_n$, так, что $x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Такое разбиение называют сеткой, точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - узлами сетки. Если $x_{i+1} - x_i = h$ - постоянное число (шаг сетки), не зависящее от i, то сетка называется равномерной. Численные методы позволяют находить приближенные значения для точного решения задачи Коши в узлах сетки: $y_i \approx u(x_i)$. В качестве приближенного решения в таком случае выступает совокупность векторов $y_0, y_1, \ldots, y_n$ (таблица), которую называют сеточной функцией.

Большинство численных методов можно записать в следующем общем виде:

$$y_{i+1} = F\left(y_{i-q}, y_{i-q+1}, \ldots, y_i, \ldots, y_{i+s}\right)$$

где F - некоторая известная функция, зависящая от вида уравнения, выбранной сетки и метода решения. При $q = 0$ и $0 \le s \le 1$ методы называются одношаговыми, при $q \ge 1$ или $s > 1$ - многошаговыми. При $s = 0$ численные методы носят название явных, при $s = 1$ - неявных, при $s > 1$ - методы с забеганием вперед. Таким образом, одношаговые методы имеют вид:

$$y_{i+1} = F(y_i) \text{ - явные,} \quad y_{i+1} = F(y_i, y_{i+1}) \text{ - неявные.}$$

4.3. Метод Эйлера

4.3.1. Разностная схема

Метод Эйлера - простейший одношаговый метод. Его можно выводить из разных соображений. Например, пусть $u(x)$ - скалярная непрерывно дифференцируемая функция, т.е. в каждой точке x существует производная

$$\frac{du(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}.$$

Тогда при малых h

$$\frac{du(x)}{dx} \approx \frac{u(x+h) - u(x)}{h},$$

и выражение $\dfrac{u(x+h) - u(x)}{h}$ может использоваться в качестве разностной аппроксимации для первой производной. Рассмотрим задачу Коши для одного скалярного уравнения

$$u'(x) = f(x, u), \quad u(x_0) = u_0$$

на отрезке $\left[x_0, b\right]$ и в узлах сетки заменим производную ее разностной аппроксимацией. В результате получим систему уравнений для нахождения сеточной функции:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i), \quad y_0 = u_0, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

Эта система уравнений называется разностной схемой Эйлера. Для нахождения y_{i+1} имеем явную формулу

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

Аналогично можно получить неявную схему Эйлера

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_{i+1}, y_{i+1}), \quad y_0 = u_0$$

если с самого начала использовать в качестве разностной аппроксимации для производной выражение $\dfrac{u(x)-u(x-h)}{h}$.

4.3.2. Погрешность аппроксимации

Если в разностную схему подставить точное решение $u(x)$ исходной задачи, то возникнет невязка (точное решение не удовлетворяет разностной схеме). Эта невязка называется погрешностью аппроксимации разностной схемы:

$$\psi_i = f(x_i,u_i)-\frac{u_{i+1}-u_i}{h}, \quad \text{где } u_i = u(x_i).$$

С учетом того, что $\dfrac{du(x_i)}{dx} = f(x_i,u_i)$, можно получить для ψ_i следующее выражение:

$$\psi_i = \frac{du(x_i)}{dx}-\frac{u(x_i+h)-u(x_i)}{h} = \frac{du(x_i)}{dx}-\frac{h\cdot\dfrac{du(x_i)}{dx}+\dfrac{h^2}{2}\cdot\dfrac{d^2u(x_i)}{dx^2}+\ldots}{h} = -\frac{h}{2}\cdot\frac{d^2u(x_i)}{dx^2}+\ldots = O(h)$$

Если ввести теперь норму погрешности аппроксимации $\|\psi\| = \max\limits_i|\psi_i|$,то она также будет иметь первый порядок малости относительно h : $\|\psi\| = O(h)$. В связи с этим говорят, что явная схема Эйлера имеет первый порядок аппроксимации.

То же верно и для неявной схемы Эйлера. Действительно, для нее

$$\psi_i = f(x_{i+1},u_{i+1})-\frac{u_{i+1}-u_i}{h},$$

поэтому

$$\psi_i = \frac{du(x_{i+1})}{dx}-\frac{u(x_{i+1})-u(x_{i+1}-h)}{h} = \frac{du(x_{i+1})}{dx}-\frac{-h\cdot\dfrac{du(x_{i+1})}{dx}+\dfrac{h^2}{2}\cdot\dfrac{d^2u(x_{i+1})}{dx^2}-\ldots}{h} = O(h).$$

4.3.3. Сходимость

Пусть z_i - погрешность приближенного решения в узлах сетки, т.е. $z_i = y_i - u(x_i)$. Тогда $y_i = u_i + z_i$, $y_{i+1}-y_i = u_{i+1}-u_i+z_{i+1}-z_i$, кроме того,

$$f(x_i,y_i) = f(x_i,u_i+z_i) = f(x_i,u_i)+z_i\cdot f_u(x_i,u_i+\theta\cdot z_i), \quad 0\le\theta\le 1.$$

Следовательно, можно получить соотношение

$$\frac{z_{i+1}-z_i}{h} = z_i\cdot f_u(x_i,u_i+\theta\cdot z_i)+f(x_i,u_i)-\frac{u_{i+1}-u_i}{h},$$

или

$$\frac{z_{i+1}-z_i}{h} = \alpha_i\cdot z_i+\psi_i, \quad \text{где } \alpha_i = f_u(x_i,u_i+\theta\cdot z_i) \text{ при } \theta\in[0,1].$$

В итоге получим

$$z_{i+1} = (1+h\cdot\alpha_i)\cdot z_i + h\cdot\psi_i,$$

или

$$|z_{i+1}| \le |1+h\cdot\alpha_i|\cdot|z_i|+h\cdot|\psi_i|.$$

Таким образом, если выполнены условия

$$-C\le f_u(x,u)\le 0 \quad \text{и} \quad h\le {2}/{C}, \tag{1}$$

то $\left|1+h\cdot\alpha_i\right|\le 1$, $\left|z_{i+1}\right|\le\left|z_i\right|+h\cdot\left|\psi_i\right|$, и, пользуясь тем, что $z_0=0$, получим неравенство

$$\left|z_{i+1}\right|\le h\cdot\sum_{j=0}^{i}\left|\psi_j\right|\le hn\cdot\max_j\left|\psi_j\right|=\left(b-x_0\right)\cdot\|\psi\|=O(h).$$

Итак, можно сделать вывод, что при выполнении условий (1) $\|y-u\|=O(h)\to 0$ при $h\to 0$, т.е. метод Эйлера сходится к точному решению с первым порядком относительно шага сетки (имеет первый порядок точности).

В случае неявной схемы Эйлера для погрешности решения получим формулу

$$\frac{z_{i+1}-z_i}{h}=f\left(x_{i+1},y_{i+1}\right)-\frac{u_{i+1}-u_i}{h}=f\left(x_{i+1},u_{i+1}\right)-\frac{u_{i+1}-u_i}{h}+z_{i+1}\cdot f_u\left(x_{i+1},u_{i+1}+\theta\cdot z_{i+1}\right)=$$
$$=-\psi_{i+1}+z_{i+1}\cdot\alpha_{i+1}$$

т.е.

$$z_{i+1}=\frac{z_i}{1-h\cdot\alpha_{i+1}}-\frac{h}{1-h\cdot\alpha_{i+1}}\cdot\psi_{i+1}.$$

Если поставить условие

$$f_u(x,u)\le 0,$$

то будет справедливо соотношение $1-h\cdot\alpha_{i+1}\ge 1$, тогда

$$\left|z_{i+1}\right|\le\left|z_i\right|+h\cdot\left|\psi_i\right|.$$

Отсюда, как уже было показано, следует, что

$$\left|z_{i+1}\right|\le h\cdot\sum_{j=0}^{i}\left|\psi_j\right|=O(h)\to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0.$$

4.4. Устойчивость

4.4.1. Устойчивость задачи Коши по начальным данным

Рассмотрим вопрос об устойчивости задачи Коши

$$u'(x)=f(x,u), \quad u(x_0)=u_0$$

по начальным данным. Пусть $\tilde{u}(x)$ - решение задачи Коши с начальным условием $\tilde{u}_0$.

Тогда для функции $z(x)=\tilde{u}(x)-u(x)$ можно написать диффереціальное уравнение

$$\frac{dz}{dx}=\alpha(x)\cdot z, \quad z(x_0)=z_0=\tilde{u}_0-u_0, \quad x\in\left[x_0,b\right]$$

где

$$\alpha(x)=\frac{f(x,\tilde{u})-f(x,u)}{z}=f_u(x,u+\theta\cdot z), \quad \theta\in[0,1].$$

Решая дифференциальное уравнение, получаем

$$z(x)=z(x_0)\cdot\exp\left(\int_{x_0}^{x}\alpha(s)ds\right),$$

следовательно, если наложить условие

$$\alpha(x)\le 0, \quad (\text{т.е. } f_u(x,u)\le 0),$$

то можно сделать вывод

$$\left|u(x)-\tilde{u}(x)\right|\le\left|u_0-\tilde{u}_0\right|$$

т.е. решение задачи устойчиво по начальным данным (погрешность не возрастает). Если же $f_u(x,u)\ge\beta>0$, то получаем неравенство

$$\left|u(x)-\widetilde{u}(x)\right| \geq \left|u_0-\widetilde{u}_0\right| \cdot e^{\beta x} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$$

т.е. решение исходной задачи неустойчиво по начальным данным.

Решение задачи (2) ведет себя аналогично решению линейного дифференциаль-
ного уравнения

$$\frac{dz}{dx} = \lambda \cdot z, \quad z(x_0) = z_0 = \widetilde{u}_0 - u_0, \quad x \in [x_0, b], \ \lambda = \mathrm{const}, \qquad (3)$$

которое можно рассматривать как модельное при исследовании устойчивости. Решение этого уравнения имеет вид $z(x) = z_0 \cdot e^{\lambda x}$, его модуль не возрастает при $\lambda \leq 0$, т.е. $\left|z(x)\right| \leq \left|z_0\right|$ $\forall x \geq x_0$, и решение устойчиво.

4.4.2. Устойчивость схемы Эйлера на модельной задаче

Для разностных схем, используемых в приближенном решении дифференциальных уравнений, естественно требовать выполнения аналогичного свойства устойчивости:

$$\left|y_i\right| \leq \left|y_0\right| \qquad \forall i \geq 0.$$

Оказывается, что свойство устойчивости разностных схем связано с их сходимостью. Например, исследуем устойчивость явной схемы Эйлера на примере решения модельного уравнения (3):

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h} = \lambda \cdot y_i, \quad \text{отсюда}$$

$$y_{i+1} = (1 + h\cdot\lambda)\cdot y_i, \quad \text{т.е.}$$

$$\left|y_{i+1}\right| \leq \left|y_i\right| \leq \ldots \leq \left|y_0\right|, \quad \text{если} \quad \left|1+h\cdot\lambda\right| \leq 1,$$

т.е. для устойчивости достаточно выполнения условий

$$\lambda \leq 0 \ \text{ и } \ h \leq -\frac{2}{\lambda}.$$

Таким образом, явная схема Эйлера условно устойчива, поскольку накладывается условие на шаг. Действительно, легко убедиться в том, что при большом шаге схема становится неустойчивой при $\lambda \leq 0$. Пусть, например, $h \geq -\dfrac{3}{\lambda}$, тогда

$$\left|y_{i+1}\right| = \left|1+h\cdot\lambda\right| \cdot \left|y_i\right| \geq 2\cdot\left|y_i\right| \geq \ldots \geq 2^{i+1}\cdot\left|y_0\right| \xrightarrow[i\to\infty]{} \infty,$$

т.е. схема неустойчива.

Иначе обстоит дело с неявной схемой Эйлера. Рассмотрим ту же модельную
задачу:

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h} = \lambda \cdot y_{i+1},$$

следовательно,

$$y_{i+1} = \frac{1}{1-h\cdot\lambda}\cdot y_i,$$

и схема устойчива при $\lambda \leq 0$ для любого шага $h > 0$, поскольку $0 < \dfrac{1}{1-h\cdot\lambda} \leq 1$.

4.5. Методы Рунге-Кутты второго порядка точности

4.5.1. Канонический вид явных одношаговых методов

Как уже было определено выше (в разделе 3.2.1.), общий вид одношаговых методов:

$$y_{i+1} = F(y_i, y_{i+1}).$$

В случае явных одношаговых методов эта формула принимает вид

$$y_{i+1} = F(y_i).$$

Перепишем ее следующим образом:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \varphi(x_i, y_i) \tag{4}$$

Формула (4) называется каноническим видом явных одношаговых методов.

4.5.2. Построение семейства схем второго порядка точности.

Идея построения семейства разностных схем 2-го порядка точности состоит в следующем. Пусть $u(x)$ - решение задачи Коши

$$u'(x) = f(x,u), \quad u(x_0) = u_0 .$$

Разлагая решение по формуле Тейлора на интервале сетки $[x_i, x_{i+1}]$ длины h, имеем

$$u_{i+1} = u_i + h \cdot u'(x_i) + \frac{h^2}{2} \cdot u''(x_i) + \ldots \tag{5}$$

В простейшем случае, ограничиваясь только первым членом разложения и заменяя u' на $f(x,u)$, получаем для приближенного решения

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i),$$

т.е. явную схему Эйлера, которая имеет первый порядок точности. Можно предположить, что для получения схемы второго порядка надо в разложении (5) сохранить член со второй производной. Заменим u'' конечной разностью:

$$u'' = \frac{d}{dx} f(x,u) = \frac{f(x + \Delta x, u + \Delta u) - f(x,u)}{\Delta x} \tag{6}$$

при соответствующем выборе величин Δx и Δu. Причем для Δu можно указать приближенную формулу

$$\Delta u \approx \Delta x \cdot f(x,u) \tag{7}$$

Из формул (5)-(7) можно сделать вывод, что

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h} \approx \left(1 - \frac{h}{2\Delta x}\right) \cdot f(x_i, u_i) + \frac{h}{2\Delta x} \cdot f(x_i + \Delta x, u_i + \Delta x \cdot f(x_i, u_i)).$$

Это дает нам основание искать разностные схемы второго порядка точности в виде

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \varphi(x_i, y_i) = \beta \cdot f(x_i, y_i) + \gamma \cdot f(x_i + \alpha \cdot h, y_i + \alpha \cdot hf(x_i, y_i)) \tag{8}$$

где α, β, γ - параметры, подлежащие определению.

Рассмотрим погрешность аппроксимации для схемы (8).:

$$\psi_i = \varphi(x_i, u_i) - \frac{u_{i+1} - u_i}{h} = \beta \cdot f_i + \gamma \cdot f(x_i + \alpha \cdot h, u_i + \alpha \cdot hf_i) - u_i' - \frac{h}{2} \cdot u_i'' + O(h^2) =$$
$$= \beta \cdot f_i + \gamma \cdot \left(f_i + \alpha \cdot h \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i + \alpha \cdot h \cdot f_i \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_i \right) - u_i' - \frac{h}{2} \cdot u_i'' + O(h^2),$$

где

$$f_i = f(x_i, u_i),\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, u_i),\ \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_i = \frac{\partial f}{\partial u}(x_i, u_i),$$

$$u_i' = \frac{du}{dx}(x_i), \quad u_i'' = \frac{d^2u}{dx^2}(x_i).$$

Тогда можно вывести следующие соотношения:

$$u_i' = f(x_i, u_i), \quad u_i'' = \frac{df}{dx}(x_i, u_i) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i + f_i \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_i.$$

С учетом этих соотношений погрешность аппроксимации примет вид

$$\psi_i = (\beta + \gamma - 1) \cdot u_i' + h \cdot \left(\gamma \cdot \alpha - \frac{1}{2}\right) \cdot u_i'' + O(h^2).$$

Следовательно, для того, чтобы погрешность аппроксимации имела второй порядок малости относительно шага h, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\beta + \gamma = 1 \ \text{ и } \ \gamma \cdot \alpha = \frac{1}{2},$$

которые можно переписать в виде

$$\gamma = \frac{1}{2 \cdot \alpha} \ \text{ и } \ \beta = 1 - \frac{1}{2 \cdot \alpha}.$$

Введем обозначение $\frac{1}{2 \cdot \alpha} = \sigma$, тогда семейство разностных схем (8), имеющих погрешность аппроксимации второго порядка, примет вид однопараметрического семейства

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = (1 - \sigma) \cdot f(x_i, y_i) + \sigma \cdot f\left(x_i + \frac{1}{2\sigma} \cdot h, y_i + \frac{1}{2\sigma} \cdot hf(x_i, y_i)\right) \tag{9}$$

где σ - любое ненулевое число. Численные методы решения задачи Коши, использующие разностные схемы семейства (9), называются <u>методами Рунге - Кутта второго порядка точности</u>.

Схему (9) можно также переписать в форме "предиктор - корректор", в которой сначала считается промежуточное значение $\bar{y}_{i+1}$, а затем оно корректируется:

$$\begin{cases} \dfrac{\bar{y}_{i+1} - y_i}{h/2\sigma} = f(x_i, y_i) \\ \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} = (1 - \sigma) \cdot f(x_i, y_i) + \sigma \cdot f\left(x_i + h/2\sigma, \bar{y}_{i+1}\right) \end{cases} \tag{10}$$

В частности, при $\sigma = 1/2$ получаем схему Эйлера - Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\bar{y}_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) \\ \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})\right) \end{cases},$$

а при $\sigma = 1$ - модифицированную схему Эйлера:

$$\begin{cases} \dfrac{\bar{y}_{i+1} - y_i}{h/2} = f(x_i, y_i) \\ \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} = f\left(x_i + h/2, \bar{y}_{i+1}\right) \end{cases}.$$

4.6. Сходимость методов Рунге - Кутта второго порядка

4.6.1. Исследование сходимости семейства разностных схем на модельной задаче

Рассмотрим вопрос о сходимости схем семейства (9) в применениии к модельной задаче Коши

$$u' = \lambda \cdot u + f(x), \ \ \lambda < 0, \quad u(x_0) = u_0 .$$

Разностная схема (9) принимает вид

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = (1-\sigma)\cdot(\lambda \cdot y_i + f(x_i)) + \sigma \cdot \left(\lambda \cdot \left(y_i + \frac{h}{2\sigma}(\lambda \cdot y_i + f(x_i)) \right) + f\left(x_i + \frac{h}{2\sigma} \right) \right),$$

отсюда можно заключить, что

$$y_{i+1} = q \cdot y_i + h \cdot \omega_i,$$

где

$$q = 1 + \lambda \cdot h + \frac{\lambda^2 h^2}{2},$$

$$\omega_i = (1-\sigma)\cdot f(x_i) + \sigma \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2\sigma} \right) + \frac{\lambda \cdot h}{2} \cdot f(x_i).$$

Выведем теперь рекуррентную формулу для погрешности разностной схемы

$$z_i = y_i - u_i .$$

Поскольку

$$z_{i+1} = y_{i+1} - u_{i+1} = q \cdot y_i + h \cdot \omega_i - u_{i+1} = q \cdot z_i + q \cdot u_i - u_{i+1} + h \cdot \omega_i,$$

появляется возможность записать рекуррентную формулу в виде

$$z_{i+1} = q \cdot z_i + h \cdot \delta_i, \tag{11}$$

где слагаемое $h \cdot \delta_i$ удовлетворяет соотношению

$$h \cdot \delta_i = \left(1 + \lambda \cdot h + \frac{\lambda^2 h^2}{2} \right) \cdot u_i - u_{i+1} + h \cdot \left((1-\sigma) f(x_i) + \sigma \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2\sigma} \right) \right) + \frac{h^2 \lambda}{2} \cdot f(x_i).$$

Разложим в последней формуле функции $u_{i+1} = u(x_i + h)$ и $f\left(x_i + \frac{h}{2\sigma} \right)$ в ряд Тейлора в окрестности x_i, тогда

$$h \cdot \delta_i = \left(1 + \lambda \cdot h + \frac{\lambda^2 h^2}{2} \right) \cdot u_i - \left(u_i + h \cdot u_i' + \frac{h^2}{2} \cdot u_i'' + O(h^3) \right) +$$

$$+ h \cdot \left(f(x_i) + \frac{h}{2} \cdot f'(x_i) + O(h^2) \right) + \frac{h^2 \lambda}{2} \cdot f(x_i) = h \cdot (\lambda \cdot u_i + f(x_i) - u_i') + ,$$

$$+ \frac{h^2}{2} \cdot (\lambda^2 u_i + \lambda \cdot f(x_i) + f'(x_i) - u_i'') + O(h^3)$$

но

$$u_i' = \lambda \cdot u_i + f(x_i)$$

и

$$u_i'' = \lambda \cdot u_i' + f'(x_i) = \lambda^2 u_i + \lambda \cdot f(x_i) + f'(x_i),$$

поэтому

$$h \cdot \delta_i = O(h^3) \quad \text{или} \quad \delta_i = O(h^2).$$

Нетрудно убедиться в том, что $q > 0$ для любых λ и h, и $q \le 1$ при условии

$$-2 \le \lambda \cdot h < 0, \text{ т.е. } 0 < h \le -\frac{2}{\lambda}.$$

Тогда из формулы (11) следует, что

$$|z_{i+1}| \le |z_i| + h \cdot |\delta_i| \le |z_0| + \sum_{j=0}^{i} h \cdot |\delta_j| \le (b - x_0) \cdot \max_j |\delta_j| = O(h^2),$$

т.е. схемы Рунге - Кутта второго порядка сходятся и имеют второй порядок точности (для модельной задачи).

4.7. Многошаговые схемы. Метод Адамса

4.7.1. Сценарий построения разностных схем

В разделе 3.2.1. был приведен общий вид разностной схемы для многошаговых методов. В частности, для решения задачи Коши

$$u'(x) = f(x,u), \quad u(x_0) = u_0 .$$

наиболее употребительными являются q-шаговые методы вида

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{a_k}{h} \cdot y_{i+1-k} = \sum_{k=0}^{q} b_k \cdot f(x_{i+1-k}, y_{i+1-k}), \; a_0 \ne 0, \; b_q \ne 0 \qquad (12)$$

Рассмотренные нами в предыдущих разделах одношаговые методы являются частными случаями формулы (12). Например, при $q = 1$, $b_0 = 0$, $b_1 = a_0 = 1$, $a_1 = -1$ получаем явную схему Эйлера.

Схема (12) будет явной, если $b_0 = 0$ (в таком случае она называется экстрапо-
ляционной). Значения y_{i+1} будут тогда определяться из предыдущих значений по явной формуле

$$y_{i+1} = \frac{1}{a_0} \cdot \sum_{k=1}^{q} (b_k h \cdot f(x_{i+1-k}, y_{i+1-k}) - a_k \cdot y_{i+1-k}).$$

Вычисления начинаются с $i = q-1$. Чтобы найти y_q, надо знать значения сеточной функции $y_0, y_1, \ldots, y_{q-1}$. Значения $y_1, \ldots, y_{q-1}$ приходится вычислять с помощью какого-нибудь другого метода (например, Рунге - Кутта), используя начальное условие y_0. Если же $b_0 \ne 0$, то схема (12) будет неявной (интерполяционной). Тогда для нахождения y_{i+1} необходимо решать нелинейное уравнение

$$a_0 \cdot y_{i+1} - b_0 h \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1}) = \sum_{k=1}^{q} (b_k h \cdot f(x_{i+1-k}, y_{i+1-k}) - a_k \cdot y_{i+1-k})$$

Это уравнение можно решать, например, методом Ньютона.

Погрешность аппроксимации схемы (12) определяется формулой

$$\psi_i = \sum_{k=0}^{q} b_k f(x_{i+1-k}, u_{i+1-k}) - \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{q} a_k u_{i+1-k} , \qquad (13)$$

где $u_i = u(x_i)$ - точное решение задачи Коши. Если $\|\psi\| = \max_i |\psi_i| = O(h^\alpha)$, то схема имеет порядок аппроксимации, равный α.

Коэффициенты в схеме (12) выбираются из условий аппроксимации и устойчивости. Кроме того, поскольку коэффициенты схемы определены с точностью до постоянного множителя, можно считать, что

$$\sum_{k=0}^{q} b_k = 1.$$

Второе условие можно получить из того факта, что функция $u(x) \equiv u_0$ есть решение дифференциального уравнения при $f(x,u) \equiv 0$. В таком случае из (12) имеем

$$\sum_{k=0}^{q} a_k = 0.$$

Разлагая (13) по степеням h и требуя, чтобы погрешность имела заданный порядок, получим остальной набор условий для нахождения a_k, b_k.

Исторически первые многошаговые схемы появились способом, отличным от вышеизложеного. Если проинтегрировать дифференциальное уравнение на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, то получим формулу

$$u_{i+1} - u_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, u(x))dx.$$

Заменяя теперь в этом соотношении интеграл некоторой квадратурной формулой, выведенной с помощью замены подинтегральной функции интерполяционным многочленом, построенным по узлам $x_{i+1-q}, x_{i+2-q}, \ldots, x_i$, получим разностную схему Адамса. Ее можно записать в виде

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \sum_{k=0}^{q} b_k \cdot f(x_{i+1-k}, y_{i+1-k}), \tag{13}$$

где

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, u(x))dx \approx h \cdot \sum_{k=0}^{q} b_k \cdot f(x_{i+1-k}, u_{i+1-k})$$

- квадратурная формула для интеграла. Очевидно, что формула (13) - частный случай разностной схемы (12).

4.8. Явные схемы Адамса

4.8.1. Построение двухшаговой и трехшаговой схем

Для составления квадратурной формулы применим интерполяционную формулу Ньютона с разделенными разностями (см. раздел 3.3). Введем функцию $v(x)$, определенную следующим образом:

$$v(x) = f(x, u(x)).$$

Тогда, как показано в разделе 3.3, можно интерполировать функцию $v(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ многочленом

$$v(x) = v(x_i) + (x - x_i) \cdot v(x_i, x_{i-1}) + (x - x_i)(x - x_{i-1}) \cdot v(x_i, x_{i-1}, x_{i-2}) + \ldots$$

где $v(x_i, x_{i-1}), v(x_i, x_{i-1}, x_{i-2}), \ldots$ - разделенные разности. Выполним замену переменной по формуле $x = x_i + t \cdot h$ и введем обозначения

$$\Delta v_{i-1} = v_i - v_{i-1} = v(x_i) - v(x_{i-1}),$$
$$\Delta^2 v_{i-2} = \Delta v_{i-1} - \Delta v_{i-2} = v_i - 2 \cdot v_{i-1} + v_{i-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^q v_{i-q} = \Delta^{q-1} v_{i-(q-1)} - \Delta^{q-1} v_{i-q}$$

Учитывая, что

$$x_i - x_{i-q} = q \cdot h \quad \text{и} \quad x - x_{i-q} = (t+q) \cdot h,$$

можно выписать соотношения для разделенных разностей

$$v(x_i, x_{i-1}) = \frac{\Delta v_{i-1}}{h}, \quad v(x_i, x_{i-1}, x_{i-2}) = \frac{\Delta^2 v_{i-2}}{2 \cdot h^2}, \text{ и т.д.}$$

и записать интерполяционный многочлен в виде

$$v(x_i + t \cdot h) = v_i + t \cdot \Delta v_{i-1} + \frac{t \cdot (t+1)}{2} \Delta^2 v_{i-2} + \ldots + \frac{t \cdot (t+1) \cdot \ldots \cdot (t+q-2)}{(q-1)!} \Delta^{q-1} v_{i+1-q} + \Theta_q,$$

где

$$\Theta_q = \frac{t \cdot (t+1) \cdot \ldots \cdot (t+q-1)}{q!} v^{(q)}(\xi) \text{ - остаточный член.}$$

Тогда квадратурная формула для интеграла примет вид:

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v(x) dx &= h \cdot \int_0^1 v(x_i + t \cdot h) dt = \\ &= h \cdot \left(v_i + P_1 \Delta v_{i-1} + P_2 \Delta^2 v_{i-2} + \ldots + P_{q-1} \cdot \Delta^{q-1} v_{i+1-q} \right) + R_q \end{aligned}, \quad (14)$$

где

$$R_q = h \cdot \int_0^1 \frac{t \cdot (t+1) \cdot \ldots \cdot (t+q)}{(q+1)!} v^{(q+1)}(\xi) dt,$$

$$P_q = \int_0^1 \frac{t \cdot (t+1) \cdot \ldots \cdot (t+q-1)}{q!} dt, \text{ в частности, } P_1 = \frac{1}{2}, \; P_2 = \frac{5}{12}, \text{ и т.д.}$$

Таким образом, из формул (13) и (14) можно получить общий вид явной q-шаговой схемы Адамса:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f_i + \frac{1}{2} \cdot (f_i - f_{i-1}) + \frac{5}{12} \cdot (f_i - 2 \cdot f_{i-1} + f_{i-2}) + \ldots + P_{q-1} \Delta^{q-1} f_{i+1-q}$$

В частности, двухшаговая схема Адамса принимает форму

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h}=\frac{3}{2}\cdot f_i-\frac{1}{2}\cdot f_{i-1} \qquad (15)$$

а трехшаговая схема имеет вид

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h}=\frac{23}{12}\cdot f_i-\frac{4}{3}\cdot f_{i-1}+\frac{5}{12}f_{i-2}, \quad \text{где} \quad f_i=f(x_i,y_i).$$

4.8.2. Погрешность аппроксимации

Определим порядок аппроксимации двухточечной явной схемы Адамса (15):

$$\psi_i=\frac{3}{2}\cdot f(x_i,u_i)-\frac{1}{2}\cdot f(x_{i-1},u_{i-1})-\frac{u_{i+1}-u_i}{h}.$$

Разложим в этом представлении слагаемые $f(x_{i-1},u_{i-1})=f_{i-1}$ Ц u_{i+1} по степеням h:

$$f_{i-1}=f_i-h\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot f\right)_i+O(h^2),$$

$$u_{i+1}=u_i+h\cdot u_i'+\frac{h^2}{2}\cdot u_i''+O(h^3).$$

Получим такое выражение для погрешности аппроксимации:

$$\psi_i=\frac{3}{2}\cdot f_i-\frac{1}{2}\cdot f_i+\frac{h}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}f\right)_i-u_i'-\frac{h}{2}\cdot u_i''+O(h^2).$$

Учитывая теперь, что $u_i'=f_i$ и $u_i''=\left(\frac{df}{dx}\right)_i=\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot f\right)_i$, получим результат:

$$\psi_i=O(h^2),$$

т.е. двухшаговая явная схема Адамса имеет второй порядок аппроксимации.

4.8.3. Устойчивость на модельной задаче

Исследуем устойчивость разностной схемы (15) на модельной задаче

$$u'=\lambda\cdot u, \quad \lambda<0, \quad u(x_0)=u_0.$$

Для модельного уравнения схема примет вид

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h}=\lambda\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot y_i-\frac{1}{2}\cdot y_{i-1}\right)$$

или

$$y_{i+1}-\left(1+\frac{3}{2}\cdot h\lambda\right)\cdot y_i+\frac{h\lambda}{2}\cdot y_{i-1}=0.$$

Последнее уравнение является частным случаем трехточечного однородного разностного уравнения с постоянными коэффициентами:

$$a\cdot y_{i+1}+b\cdot y_i+c\cdot y_{i-1}=0 \qquad (16)$$

В уравнении (16) любое его решение однозначно определяется заданием значений в двух соседних узлах сетки. Действительно, зная y_s и y_{s-1}, находим y_{s+1}, и т.д. Если $y_i^{(1)}$ и $y_i^{(2)}$ - два линейно независимых решения уравнения (16), то общее решение этого уравнения можно записать в виде линейной комбинации:

$$y_i=C_1\cdot y_i^{(1)}+C_2\cdot y_i^{(2)} \qquad (17)$$

Убедимся, что формула (17) в самом деле дает общее решение уравнения (16). Пусть $\tilde{y}_i$ - некоторое решение (16), и $\tilde{y}_s$, $\tilde{y}_{s-1}$ - его значения в узлах x_s, x_{s-1}. Тогда из (17) получаем систему

$$\begin{cases} C_1 \cdot y_s^{(1)} + C_2 \cdot y_s^{(2)} = \tilde{y}_s \\ C_1 \cdot y_{s-1}^{(1)} + C_2 \cdot y_{s-1}^{(2)} = \tilde{y}_{s-1} \end{cases}$$

которая однозначно разрешима относительно C_1, C_2 в силу линейной независимости решений $y_i^{(1)}$ Ц $y_i^{(2)}$.

Общее решение (17) можно найти явно. Для этого находим два решения вида q^i, подставляя q^i в уравнение (16). В таком случае получается квадратное уравнение относительно q:

$$a \cdot q^2 + b \cdot q + c = 0.$$

Для устойчивости разностной схемы должно выполняться неравенство

$$|y_i| \le |y_{i-1}| \qquad \forall\ i \tag{18}$$

В нашем случае $y_i = C_1 \cdot q_1^{\,i} + C_2 \cdot q_2^{\,i}$, поэтому неравенство (18) будет выполняться, если $|q_1| \le 1$ и $|q_2| \le 1$ Квадратное уравнение для q в нашем случае имеет вид

$$q^2 - \left(1 + \frac{3}{2}\mu\right) \cdot q + \frac{1}{2}\mu = 0, \text{ где } \mu = h\lambda < 0.$$

Заметим, что дискриминант этого уравнения всегда положителен, поскольку

$$\left(1 + \frac{3}{2}\mu\right)^2 - \frac{\mu}{2} > 0 \quad \forall \mu < 0.$$

Кроме того, заметим, что в квадратном уравнении вида

$$q^2 + b\cdot q + c = 0$$

условие на корни $\left|q_{1,2}\right| \le 1$ выполняется, если $|b| \le 1 + c$ при $c \le 1$, т.к.

$$\left|q_{1,2}\right| \le \left|\frac{b}{2}\right| + \left|\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}\right| \le \frac{1+c}{2} + \frac{1-c}{2} = 1.$$

В нашем случае $b = -1 - \frac{3}{2}\mu$, $c = \frac{\mu}{2} < 0$, поэтому условие устойчивости запишется как неравенство

$$\left|-1 - \frac{3}{2}\mu\right| \le 1 + \frac{1}{2}\mu,$$

выполняющееся при

$$-1 \le \mu < 0.$$

Таким образом, условие устойчивости двухточечной схемы Адамса на модельной задаче принимает вид $h \le -\frac{1}{\lambda}$ (допустимый шаг в два раза меньше, чем в схеме Эйлера).

4.9. Неявные схемы Адамса

4.9.1. Построение неявных схем

Для построения q-шаговой неявной (интеполяционной) схемы будем использовать интерполяционный многочлен Ньютона, построенный по значениям функции $v(x) = f(x, u(x))$ в узлах $x_{i+1-q}, \dots, x_i, x_{i+1}$:

$$v(x_{i+1} + t\cdot h) = v_{i+1} + t\cdot\Delta v_i + \frac{t\cdot(t+1)}{2}\Delta^2 v_{i-1} + \dots + \frac{t\cdot(t+1)\cdot\ldots\cdot(t+q-1)}{q!}\Delta^q v_{i+1-q} + \Theta_{q+1},$$

где

$$\begin{aligned}
&\Delta v_i = v_{i+1} - v_i = v(x_{i+1}) - v(x_i),\\
&\Delta^2 v_{i-1} = \Delta v_i - \Delta v_{i-1} = v_{i+1} - 2\cdot v_i + v_{i-1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\Delta^q v_{i+1-q} = \Delta^{q-1} v_{i+2-q} - \Delta^{q-1} v_{i+1-q}
\end{aligned}$$

Воспользуемся формулой

$$u_{i+1} - u_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, u(x))dx = h \cdot \int_{-1}^{0} v(x_{i+1} + t \cdot h)dt .$$

Подставляя в эту формулу интерполяционный многочлен, получим общий вид неявной схемы Адамса:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f_{i+1} - \frac{1}{2} \cdot (f_{i+1} - f_i) - \frac{1}{12} \cdot (f_{i+1} - 2 \cdot f_i + f_{i-1}) + \ldots + P_q \Delta^q f_{i+1-q} ,$$

где коэффициенты P_q имеют новый смысл:

$$P_q = \int_{-1}^{0} \frac{t \cdot (t+1) \cdot \ldots \cdot (t+q-1)}{q!} dt \text{ , т.е. } P_1 = -\frac{1}{2} \quad , \quad P_2 = -\frac{1}{12}, \text{ и т.д.}$$

В частности, полагая $q = 2$, получим двухшаговую неявную схему Адамса:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{5}{12} \cdot f_{i+1} + \frac{8}{12} \cdot f_i - \frac{1}{12} \cdot f_{i-1} \tag{19}$$

4.9.2. Двухшаговая схема: погрешность аппроксимации и устойчивость на модельной задаче

Аналогично разделу 3.8.2., определим порядок аппроксимации неявной двухточечной семы Адамса (19). Погрешность аппроксимации запишется следующим образом:

$$\psi_i = \frac{5}{12} \cdot f_{i+1} + \frac{8}{12} \cdot f_i - \frac{1}{12} \cdot f_{i-1} - \frac{u_{i+1} - u_i}{h},$$

где

$$f_i = f(x_i, u(x_i)),$$

$u(x)$ - точное решение задачи Коши.

Тогда справедливы следующие разложения:

$$f_{i+1} = f_i + h \cdot \left(\frac{df}{dx}\right)_i + \frac{h^2}{2} \cdot \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_i + O(h^3),$$

$$f_{i-1} = f_i - h \cdot \left(\frac{df}{dx}\right)_i + \frac{h^2}{2} \cdot \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_i + O(h^3),$$

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h} = u_i' + \frac{h}{2} \cdot u_i'' + \frac{h^2}{6} \cdot u_i''' + O(h^3).$$

С учетом этих разложений формула для погрешности аппроксимации примет вид

$$\psi_i = \frac{5}{12}\cdot\left(f_i + h\cdot\left(\frac{df}{dx}\right)_i + \frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_i\right) + \frac{8}{12}\cdot f_i - \frac{1}{12}\cdot\left(f_i - h\cdot\left(\frac{df}{dx}\right)_i + \frac{h^2}{2}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_i\right) -$$

$$-u_i' - \frac{h}{2}\cdot u_i'' - \frac{h^2}{6}\cdot u_i''' + O(h^3) = (f_i - u_i') + h\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{df}{dx}\right)_i - \frac{1}{2}u_i''\right) + h^2\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_i - \frac{1}{6}u_i'''\right) + O(h^3)$$

Однако очевидно, что $u_i' = f_i$, $u_i'' = \left(\frac{df}{dx}\right)_i$, $u_i''' = \left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_i$, поэтому для погрешности аппроксимации получаем соотношение $\psi_i = O(h^3)$, а значит, двухточечная неявная схема Адамса имеет порядок аппроксимации, равный трем.

Исследуем устойчивость схемы (19) на модельной задаче

$$u' = \lambda\cdot u, \quad \lambda < 0, \quad u(x_0) = u_0 .$$

Для этой задачи схема (19) примет конкретную форму трехточечного разностного однородного уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{\lambda}{12}\cdot(5\cdot y_{i+1} + 8\cdot y_i - y_{i-1}) = 0 .$$

Подставляя в это уравнение частное решение вида $y_i = q^i$, получим квадратное уравнение для q:

$$q^2 - q - \frac{h\lambda}{12}\cdot(5q^2 + 8q - 1) = 0$$

или

$$aq^2 + bq + c = 0,$$

где $a = 1 - \frac{5}{12}h\lambda$, $b = -1 - \frac{8}{12}h\lambda$, $c = \frac{h\lambda}{12}$. Поскольку $a > 0 \quad \forall\lambda < 0$, можно записать неравенство для корней квадратного уравнения:

$$|q_{1,2}| \le \frac{|b| + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

В силу последнего неравенства, если выполнены условия $|b| \le a + c$ и $a \ge c$, то

$$|q_{1,2}| \le \frac{a + c + (a - c)}{2a} = 1 .$$

Это значит, что для устойчивости разностной схемы достаточно выполнения неравенства

$$\left|-\frac{8}{12}h\lambda - 1\right| \le 1 - \frac{4}{12}h\lambda,$$

что равносильно ограничению на шаг разностной схемы $h \le -\frac{6}{\lambda}$.

4.9.3. Нахождение решения неявной разностной схемы

Двухточечная неявная схема Адамса (19) имеет вид нелинейного уравнения относительно неизвестного значения y_{i+1} :

$$y_{i+1} = \varphi(y_{i+1}) + F(y_i, y_{i-1}), \tag{20}$$

где

$$\varphi(y_{i+1}) = \frac{5}{12}h\cdot f(x_{i+1}, y_{i+1}), \quad F(y_i, y_{i-1}) = y_i + \frac{8}{12}h\cdot f(x_i, y_i) - \frac{h}{12}\cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}).$$

Для решения уравнения (20) на каждом шаге можно предложить метод простых итераций:

$$y_{i+1}^{\ k} = \varphi\left(y_{i+1}^{\ k-1}\right) + F\left(y_i, y_{i-1}\right). \qquad (21)$$

Решение уравнения получается как предел последовательности, состоящей из приближений $y_{i+1}^{\ k}$, $k \to \infty$. Достаточное условие сходимости метода простых итераций выглядит следующим образом:

$$\left|\varphi_y\right| = \frac{5}{12} h \cdot \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < 1.$$

Это условие выполняется для достаточно малого шага h (чем меньше h, тем быстрее сходится метод). Кроме того для работы метода (21) необходимо получить из каких-то соображений начальное приближение $y_{i+1}^{\ 0}$.

4.9.4. Схема "предиктор - корректор". Сравнение методов

В качестве начального значения для итерационного процесса (21) можно использовать приближенное решение y_{i+1}, полученное с помощью явной схемы Адамса:

$$y_{i+1}^{\ 0} = y_i + \frac{h}{2} \cdot \left(3 \cdot f\left(x_i, y_i\right) - f\left(x_{i-1}, y_{i-1}\right)\right)$$

$$y_{i+1}^{\ k} = \varphi\left(y_{i+1}^{\ k-1}\right) + F\left(y_i, y_{i-1}\right), \ k = 1, 2, 3, \ldots, m$$

Такое совместное использование экстраполяционной и интерполяционной разностных схем называется методом "предиктор - корректор" ("прогноз - коррекция"). Вопрос о количестве итераций m, выполняемых на каждом шаге, решается по разному. Иногда итерации производят до тех пор, пока не выполнится условие

$$\left|y_{i+1}^{\ k} - y_{i+1}^{\ k-1}\right| < \varepsilon$$

при заданной точности ε. Чаще на каждом шаге выполняют фиксированное число итераций m, как правило, небольшое. Иногда $m = 1$.

Основываясь на формулах, приведенных в разделах 3.8.1 и 3.9.1, нетрудно выписать разностные схемы Адамса для $q > 2$. На практике используется метод "предикор - корректор", состоящий из явной четырехточечной и неявной трехточечной схем Адамса. Эти схемы имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} = \dfrac{1}{24}\left(55 \cdot f_i - 59 \cdot f_{i-1} + 37 \cdot f_{i-2} - 9 \cdot f_{i-3}\right) \\ \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} = \dfrac{1}{24}\left(9 \cdot f_{i+1} + 19 \cdot f_i - 5 \cdot f_{i-1} + f_{i-2}\right) \end{cases}$$

Подводя итог изучению одношаговых и многошаговых методов решения задачи Коши, отметим, что многошаговые (q-шаговые) методы для начала счета требуют знания приближенных значений решения в $q-1$ точке (кроме уже заданных начальных условий), т.е. эти методы не являются самостартующими. Для вычисления значений в $q-1$ точке используется вспомогательный одношаговый метод (например, Рунге - Кутта). Вспомогательный одношаговый метод также используется в том случае, когда требуется в процессе вычисления изменить шаг.

Преимуществом многошаговых методов является то, что при переходе к следующей точке требуется однократное вычисление правой части $f(x, y)$ дифференциального уравнения, а в методах Рунге - Кутта - многократное. Однако это преимущество можно использовать только в методах "предиктор - корректор", поскольку сравнение остаточных членов метода Рунге-Кутта 4-го порядка и явного метода Адамса 4-го порядка показывает, что коэффициент в остаточном члене метода Рунге-Кутта в 960 раз меньше коэффициента в остаточном члене метода Адамса, т.е. при одинаковой точности схема Рунге-Кутта позволяет брать шаг в $\sqrt[4]{960} \approx 5.7$ раз больше, чем в схеме Адамса, а значит, фактически потребуется меньше вычислений правой части, чем в методе Адамса.

Неявные схемы Адамса имеют бесспорное преимущество при решении так называемых "жестких" систем дифференциальных уравнений.

4.10. Краевые задачи для ОДУ. Метод стрельбы

4.10.1. Граничные условия

Кроме задачи Коши, в которой дополнительные условия, накладываемые на решение ОДУ и его производные, задаются в одной точке x_0, существует большое число задач с дифференциальными уравнениями, в которых дополнительные условия устанавливают связь между значениями функции и ее производных в нескольких точках отрезка, на котором разыскивается решение. Такие задачи называются многоточечными. В общем случае для дифференциального уравнения n-го порядка на отрезке $[a,b]$ задается k точек $x_1,\dots,x_k$ и n соотношений вида

$$G\left(u(x_1), u'(x_1),\dots, u^{(n-1)}(x_1),\dots., u(x_k), u'(x_k),\dots, u^{(n-1)}(x_k)\right) = 0,$$

связывающих значения функции и ее производных до порядка $n-1$ в этих точках.
При $k = 2$ и $x_1 = a$, $x_2 = b$ задача называется краевой или граничной. Такие задачи наиболее часто встречаются в приложениях. Для решения двухточечных краевых задач существует большое число методов, многие из которых основаны на сведении исходной задачи к решению ряда задач Коши.

4.10.2. Метод стрельбы для краевой задачи с ОДУ 2-го порядка

Рассмотрим краевую задачу

$$u'' = f(x,u,u') \tag{22}$$

$$u(0) = \mu_1 \quad , \quad u(1) = \mu_2 \tag{23}$$

Рассмотрим также задачу Коши для уравнения (22) с начальными условиями

$$u(0) = \mu_1 \quad , \quad u'(0) = k = \operatorname{tg}\alpha\,, \tag{24}$$

где α - угол наклона касательной к интегральной кривой в точке $x = 0$. Считая решение задачи Коши (22),(24) зависящим от параметра α, т.е. $u = u(x,\alpha)$, надо найти такое значение параметра α^*, при котором $u(1,\alpha^*) = \mu_2$ (т.е. при котором интегральная кривая попадет в точку с координатами $(1,\mu_2)$). Тогда решение задачи Коши совпадет с решением краевой задачи (22),(23).
Условие попадания интегральной кривой в точку можно сформулировать в виде нелинейного уравнения относительно неизвестного α:

$$F(\alpha) = u(1,\alpha) - \mu_2 = 0 \tag{25}$$

Уравнение (25) отличается от обычных уравнений тем, что функцию $F(\alpha)$ нельзя представить аналитическим выражением, она выражается через решение задачи Коши (22),(24). Однако для решения (25) можно использовать рассмотренные ранее известные приближенные методы, в том числе простейший метод дихотомии.
Прежде всего надо определить исходный отрезок $[\alpha_0,\alpha_1]$, на концах которого функция $F(\alpha)$ принимает значения разных знаков. Такой отрезок должен содержать в себе корень уравнения α^*.
Далее для $\alpha_2 = \dfrac{(\alpha_1 - \alpha_0)}{2}$ снова решается задача Коши, определяется знак $F(\alpha_2)$ и в соответствии с этим выбирается новый отрезок - $[\alpha_0,\alpha_2]$ или $[\alpha_2,\alpha_1]$ - на котором функция $F(\alpha)$ меняет знак, и так далее до тех пор, пока разность двух последовательных приближений не станет меньше заданной величины ε. Название "метод стрельбы" связано с тем, что здесь как бы проводится "пристрелка" решения задачи Коши по углу наклона интегральной кривой в начальной точке отрезка. Этот алгоритм применим, если решение задачи Коши (22),(24) $u = u(x,\alpha)$ не слишком чувствительно к изменению α.
Для решения задачи Коши (22),(24) можно использовать любой из рассмотренных ранее методов, записав задачу в виде системы уравнений 1-го порядка:

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = f(x,u,v) \end{cases} , \quad u(0) = \mu_1 \ , \ v(0) = \mathrm{tg}\,\alpha \, .$$

Другой вариант метода стрельбы можно получить, используя линеаризацию по Ньютону уравнения (25). Пусть α_k - некоторое приближение к α^*, тогда

$$0 = F(\alpha^*) = F(\alpha_k + (\alpha^* - \alpha_k)) \approx F(\alpha_k) + (\alpha^* - \alpha_k) \cdot F'(\alpha_k),$$

поэтому

$$\alpha^* \approx \alpha_k - \frac{F(\alpha_k)}{F'(\alpha_k)},$$

и можно предложить следующий алгоритм последовательных приближений:

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{F(\alpha_k)}{F'(\alpha_k)} = \alpha_k - \frac{u(1,\alpha_k) - \mu_2}{\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}(1,\alpha_k)} .$$

Производная $\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}(1,\alpha_k)$ может быть заменена в последнем выражении разностной производной $\dfrac{u(1,\alpha_k) - u(1,\alpha_{k-1})}{\alpha_k - \alpha_{k-1}}$. Такой вариант метода Ньютона называется методом секущих:

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{u(1,\alpha_k) - \mu_2}{u(1,\alpha_k) - u(1,\alpha_{k-1})} \cdot (\alpha_k - \alpha_{k-1}) \, .$$

4.11. Разностные схемы для краевой задачи с ОДУ 2-го порядка

4.11.1. Простейшая задача. Разностная аппроксимация второй производной

Рассмотрим простейшую задачу вида (22),(24):

$$\begin{cases} u'' = f(x) \\ u(0) = \mu_1 \ , \ u(1) = \mu_2 \end{cases} , \ x \in [0,1] \tag{26}$$

Введем на отрезке $[0,1]$ равномерную сетку:

$$x_i = i \cdot h \quad , \quad i = 0,1,2,\ldots,N \quad , \quad h = \frac{1}{N}.$$

Попробум аппроксимировать вторую производную u'' с помощью значений функции $u_i = u(x_i)$ в узлах сетки. Для подбора аппроксимационной формулы воспользуемся методом неопределенных коэффициентов:

$$k_1 \cdot u_{i+1} + k_2 \cdot u_i + k_3 \cdot u_{i-1} \approx \frac{d^2 u}{dx^2}.$$

Тогда погрешность аппроксимации выразится следующим образом:

$$\psi_i = (k_1 + k_2 + k_3) \cdot u_i + (k_1 h - k_3 h) \cdot u_i' + \left(k_1 \frac{h^2}{2} + k_3 \frac{h^2}{2} \right) \cdot u_i'' +$$

$$+ \left(k_1 \frac{h^3}{6} - k_3 \frac{h^3}{6} \right) \cdot u_i''' + \left(k_1 \frac{h^4}{24} + k_3 \frac{h^4}{24} \right) \cdot u_i^{(4)} + \ldots\ldots - \frac{d^2 u}{dx^2}$$

Потребуем, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 h - k_3 h = 0 \\ k_1 \dfrac{h^2}{2} + k_3 \dfrac{h^2}{2} = 1 \end{cases}, \text{ т.е. } k_1 = k_3 = \frac{1}{h^2} \quad \text{и} \quad k_2 = -\frac{2}{h^2}.$$

Тогда

$$\psi_i = \frac{h^2}{12} \cdot u_i^{(4)} + ... = O\left(h^2\right),$$

и аппроксимация второй производной имеет вид $\frac{u_{i+1} - 2 \cdot u_i + u_{i-1}}{h^2}$. Применяя эту аппроксимацию к задаче (26), получим разностную схему для этой задачи:

$$\frac{y_{i+1} - 2 \cdot y_i + y_{i-1}}{h^2} = f\left(x_i\right) \quad , \quad y_0 = \mu_1 \quad , \quad y_N = \mu_2 . \tag{27}$$

Очевидно, что погрешность этой схемы имеет второй порядок:

$$\psi_i = \frac{u_{i+1} - 2 \cdot u_i + u_{i-1}}{h^2} - f\left(x_i\right) = \frac{u_{i+1} - 2 \cdot u_i + u_{i-1}}{h^2} - u_i'' = O\left(h^2\right)$$

Обратим внимание, что разностная схема (27) сводится к решению системы линейных уравнений с трехдиагональной матрицей. Подобные разностные схемы называются трехточечными. В общем виде такую схему можно записать в стандартной форме:

$$b_i \cdot y_{i+1} - c_i \cdot y_i + a_i \cdot y_{i-1} = -h^2 \cdot \varphi_i \quad , \quad y_0 = \mu_1 \quad , \quad y_N = \mu_2$$

Эта форма записи называется прогоночным видом трехточечной разностной схемы.

4.12. Общая задача.

4.12.1. Построение трехточечной разностной схемы 2-го порядка аппроксимации.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка в самосопряженной форме

$$Lu = \frac{d}{dx}\left(k(x) \cdot \frac{du}{dx}\right) - q(x) \cdot u = f(x) \tag{28}$$

на интервале $[0,1]$ с краевыми условиями первого рода:

$$u(0) = \mu_1 \quad , \quad u(1) = \mu_2 \tag{29}$$

Если $k(x) \geq \rho > 0$, $q(x) > 0$, то такая краевая задача описывает стационарное распределение тепла в стержне ($u(x)$ - температура в точке x, $k(x)$ - коэффициент теплопроводности). Задача имеет единственное решение, если $k(x), q(x), f(x)$ - кусочно-непрерывные функции. Возможны также другие типы краевых условий:

$$\begin{aligned} k(0) \cdot u'(0) + \sigma \cdot u(0) = \mu_1 \\ k(1) \cdot u'(1) - \sigma \cdot u(1) = \mu_2 \end{aligned} \tag{30}$$

При $\sigma = 0$ эти условия называются краевыми условиями второго рода, при $\sigma > 0$ - условиями третьего рода.

Введем на отрезке $[0,1]$ равномерную сетку

$$x_i = i \cdot h \quad , \quad i = 0,1,2,\ldots,N \quad , \quad h = \frac{1}{N}$$

и запишем трехточечную разностную схему для краевой задачи (28)-(29) в прогоночном виде

$$b_i \cdot y_{i+1} - c_i \cdot y_i + a_i \cdot y_{i-1} = -h^2 \cdot \varphi_i \quad , \quad y_0 = \mu_1 \quad , \quad y_N = \mu_2 \tag{31}$$

где коэффициенты b_i , c_i , a_i , φ_i зависят от значений функций $k(x), q(x), f(x)$ в узлах сетки, а также от шага h.

Перепишем разностную схему (31) в виде

$$\frac{1}{h} \cdot \left(b_i \cdot \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \cdot \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right) - d_i \cdot y_i = -\varphi_i \quad , \quad y_0 = \mu_1 \quad , \quad y_N = \mu_2 \tag{32}$$

где $d_i = \dfrac{c_i - a_i - b_i}{h^2}$. Схема называется однородной, если ее коэффициенты во всех узлах сетки для любого линейного дифференциального уравнения вычисляются по одним и тем же правилам. Для однородной схемы удобна система безиндексных обозначений:

$$L_h y = \frac{1}{h}\left(b \cdot y_x - a \cdot y_{\bar{x}}\right) - d \cdot y = -\varphi \qquad (33)$$

Здесь $y_x = \dfrac{y(x+h) - y(x)}{h}$, $y_{\bar{x}} = \dfrac{y(x) - y(x-h)}{h}$.

Найдем погрешность аппроксимации схемы (33):

$$\psi = L_h u + \varphi = L_h u - (Lu - f) + \varphi = \frac{1}{h}\left(b \cdot u_x - a \cdot u_{\bar{x}}\right) - \left(k \cdot u'\right)' - (d - q) \cdot u + (f + \varphi)$$

Пользуясь теперь разложением

$$u(x \pm h) = u(x) \pm h \cdot u'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) \pm \frac{h^3}{6} u'''(x) + O\left(h^4\right)$$

получаем:

$$u_x = u' + \frac{h}{2} \cdot u'' + \frac{h^2}{6} \cdot u''' + O\left(h^3\right) \quad , \quad u_{\bar{x}} = u' - \frac{h}{2} \cdot u'' + \frac{h^2}{6} \cdot u''' + O\left(h^3\right)$$

Тогда погрешность аппроксимации предстанет в виде:

$$\psi = \left(\frac{1}{h}(b-a) - k' \right) \cdot u' + \left(\frac{b+a}{2} - k \right) \cdot u'' + \frac{h \cdot (b-a)}{6} \cdot u''' - (d-q) \cdot u + (f+\varphi) + O(h^2)$$

Таким образом, схема (33) будет иметь второй порядок аппроксимации, если будут выполнены условия:

$$\frac{b-a}{h} = k'(x) + O(h^2) \quad , \quad \frac{b+a}{2} = k(x) + O(h^2)$$
$$d = q(x) + O(h^2) \quad , \quad -\varphi = f(x) + O(h^2)$$

Например, эти условия выполняются при

$$b_i = k_{i+\frac{1}{2}} \quad , \quad a_i = k_{i-\frac{1}{2}} \quad , \quad d_i = q(x_i) \quad , \quad -\varphi_{\mathrm{i}} = f(x_i) \qquad (34)$$

где $k_{i\pm\frac{1}{2}} = k\left(x_i \pm \frac{h}{2} \right)$. Действительно,

$$k_{i\pm\frac{1}{2}} = k(x_i) \pm \frac{h}{2} \cdot k'(x_i) + \frac{h^2}{8} \cdot k''(x_i) \pm \frac{h^3}{48} \cdot k'''(x_i) + O(h^4),$$

поэтому

$$\frac{k_{i+\frac{1}{2}} - k_{i-\frac{1}{2}}}{h} = k'(x_i) + O(h^2) \quad , \quad \frac{k_{i+\frac{1}{2}} + k_{i-\frac{1}{2}}}{2} = k(x_i) + O(h^2) \; .$$

4.12.2. Сходимость разностной схемы.

Для исследования сходимости рассмотрим погрешность разностной схемы в узлах сетки:

$$z_i = y_i - u(x_i)$$

Пользуясь линейностью оператора (33) и введенными ранее безиндексными обозначениями, нетрудно установить, что погрешность в узлах сетки удовлетворяет разностной схеме

$$L_h z = L_h y - L_h u = -\psi, \qquad z_0 = z_N = 0 \qquad (35)$$

где ψ - погрешность аппроксимации.

Выведем оценку для погрешности в узлах сетки z_i. Из соотношений (34) следует, что

$$b_i = a_{i+1} = k\left(x_i + \frac{h}{2} \right), \qquad d_i = q(x_i),$$

поэтому схема (35) в прогоночном виде (31) запишется следующим образом:

$$a_{i+1} \cdot z_{i+1} - c_i \cdot z_i + a_i \cdot z_{i-1} = -h^2 \psi_i\ , \qquad z_0 = z_N = 0 \tag{36}$$

где $c_i = a_i + a_{i+1} + h^2 \cdot q(x_i)$. Предположим, что в исходном линейном дифференциальном уравнении (28) $k(x) \geq \rho > 0\ ,\ \ q(x) > 0 \quad \forall x \in [0,1]$. Тогда, в частности, имеет место неравенство:

$$|c_i| \geq |a_i| + |a_{i+1}| \tag{37}$$

Значения z_i из схемы (36) можно найти, используя так называемый метод прогонки. Попробуем переписать схему в виде

$$z_i = \alpha_{i+1} \cdot z_{i+1} + \beta_{i+1}\ , \qquad i = \overline{1,N} \tag{38}$$

с неизвестными коэффициентами α_{i+1} , β_{i+1} . Подставив в формулу (36) соотношение $z_{i-1} = \alpha_i \cdot z_i + \beta_i$, получим

$$a_{i+1} \cdot z_{i+1} + (a_i \cdot \alpha_i - c_i) \cdot z_i = -h^2 \psi_i - a_i \cdot \beta_i$$

или

$$z_i = \frac{a_{i+1}}{c_i - a_i \cdot \alpha_i} \cdot z_{i+1} + \frac{h^2 \psi_i + a_i \cdot \beta_i}{c_i - a_i \cdot \alpha_i}$$

Таким образом, схема (36) разрешима в виде (38), если $c_i - a_i \cdot \alpha_i \neq 0$. В этом случае для α_{i+1} , β_{i+1} получаем рекуррентные формулы:

$$\alpha_{i+1} = \frac{a_{i+1}}{c_i - a_i \cdot \alpha_i} \quad , \quad \beta_{i+1} = \frac{h^2 \psi_i + a_i \cdot \beta_i}{c_i - a_i \cdot \alpha_i} \tag{39}$$

Для начального условия $z_0 = 0$ уравнение (38) принимает вид

$$z_0 = \alpha_1 \cdot z_1 + \beta_1 = 0\ ,$$

откуда получаем начальные условия для уравнений (39): $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Теперь можно вычислить все значения α_i , β_i , $i = \overline{1,N}$, а затем спуститься "вниз" по i от N до 1 и найти все значения z_i по формуле (38).

Заметим, что если $|\alpha_i| < 1$, то

$$|c_i - a_i \cdot \alpha_i| \geq |c_i| - |a_i| \cdot |\alpha_i| > |c_i| - |a_i|$$

и тогда из неравенства (37) и формул (39) следует, что

$$|c_i - a_i \cdot \alpha_i| > |a_{i+1}| > 0 \quad \text{и} \quad |\alpha_{i+1}| < 1\ .$$

Поскольку известно, что $\alpha_1 = 0$, то по индукции мы получаем, во-первых, разрешимость схемы (36) в виде (38), и во-вторых, справедливость неравенства

$$|\alpha_i| < 1 \qquad \forall i = \overline{1,N}\ .$$

Следовательно, из формулы (38) можно вывести неравенство:

$$\left|z_i\right| < \left|z_{i+1}\right| + \left|\beta_{i+1}\right| < \left|z_N\right| + \sum_{j=i+1}^{N}\left|\beta_j\right| \quad .$$

Учитывая, что $z_N = 0$, получаем соотношение: $\left|z_i\right| < \sum_{j=i+1}^{N}\left|\beta_j\right|$. Воспользуемся теперь рекуррентной формулой (39) для β_{i+1}, умножив ее на положительную величину a_{i+1}:

$$a_{i+1}\cdot\beta_{i+1} = \frac{a_{i+1}}{c_i - a_i\cdot\alpha_i}\cdot\left(h^2\psi_i + a_i\cdot\beta_i\right) = \alpha_{i+1}\cdot\left(h^2\psi_i + a_i\cdot\beta_i\right) \quad .$$

Тогда $\left|a_{i+1}\cdot\beta_{i+1}\right| \le h^2\cdot\left|\psi_i\right| + \left|a_i\cdot\beta_i\right|$, следовательно ,

$$\left|a_{i+1}\cdot\beta_{i+1}\right| < \sum_{m=1}^{i}h^2\left|\psi_m\right| + \left|a_1\cdot\beta_1\right| = \sum_{m=1}^{i}h^2\left|\psi_m\right| \quad ,$$

учитывая, что $\beta_1 = 0$. Наконец, поскольку $\left|a_i\right| \ge \rho > 0 \quad \forall i$, можно сделать вывод, что

$$\left|\beta_{i+1}\right| < \frac{1}{\rho}\cdot\sum_{m=1}^{i}h^2\left|\psi_m\right| \quad .$$

Таким образом, для погрешности в узлах сетки z_i можно записать неравенство

$$\left|z_i\right| < \frac{1}{\rho}\cdot\sum_{j=i+1}^{N}\sum_{m=1}^{j-1}h^2\left|\psi_m\right| \le \frac{1}{\rho}\cdot\sum_{j=1}^{N}h\sum_{m=1}^{N}h\cdot\left|\psi_m\right| = \frac{1}{\rho}\cdot\left|\psi_m\right| \qquad \forall i,m = \overline{1,N} \quad ,$$

потому что $\sum_{i=1}^{N}h = N\cdot h = 1$. Переходя к нормам, получаем

$$\left\|z\right\| < \frac{1}{\rho}\cdot\left\|\psi\right\| = O\left(h^2\right) \quad ,$$

то есть разностная схема (33) для краевой задачи (28)-(29) при условиях на коэффициенты (34) имеет второй порядок сходимости.

4.12.3. Краевые условия 2-го и 3-го рода.

Рассмотрим теперь уравнение (28) с краевыми условиями 2-го или 3-го рода (30):

$$k(0)\cdot u'(0) + \sigma\cdot u(0) = \mu_1$$
$$k(1)\cdot u'(1) - \sigma\cdot u(1) = \mu_2$$

Будем решать эту задачу с помощью трехточечной разностной схемы (31) с условиями на коэффициенты (34). При этих условиях, как было показано, схема имеет второй порядок аппроксимации. В таком случае возникает вопрос: как аппроксимировать краевые условия ? Если пользоваться для этого односторонними разностными производыми, как в методе Эйлера, то краевые условия запишутся в виде

$$\begin{aligned} k_0\cdot\frac{y_1 - y_0}{h} + \sigma\cdot y_0 = \mu_1 \\ k_N\cdot\frac{y_N - y_{N-1}}{h} - \sigma\cdot y_N = \mu_2 \end{aligned} \quad ,$$

однако, как хорошо известно (см. п. 4.3.2), такие формулы будут иметь погрешность аппроксимации первого порядка. Чтобы краевые условия не снижали порядок аппрокции разностной схемы (31), необходимо воспользоваться односторонними разностными аппроксимациями производных, имеющими второй порядок по h. Например, для этих целей подходит разностная производная

$$u'(0) \approx \frac{-3\cdot u_0 + 4\cdot u_1 - u_2}{2\cdot h} \quad ,$$

где, как обычно, $u_i = u\left(x_i\right) = u\left(i\cdot h\right)$. Действительно, по формулам Тейлора

$$u_1 = u_0 + h \cdot u'(0) + \frac{h^2}{2} \cdot u''(0) + O(h^3) \quad , \quad u_2 = u_0 + 2h \cdot u'(0) + 2h^2 \cdot u''(0) + O(h^3) ,$$

поэтому

$$\frac{-3 \cdot u_0 + 4 \cdot u_1 - u_2}{2 \cdot h} = u'(0) + O(h^2) \ .$$

При использовании подобных формул разностные аппроксимации краевых условий принимают вид

$$\delta_0 \cdot y_0 + \delta_1 \cdot y_1 + \delta_2 \cdot y_2 = \mu_1$$

$$\delta_{N-2} \cdot y_{N-2} + \delta_{N-1} \cdot y_{N-1} + \delta_N \cdot y_N = \mu_2$$

В такой ситуации для разрешения трехточечной схемы (31) также может быть использован метод прогонки, рассмотренный в п. 4.12.2. Действительно, уравнение

$$a_{i+1} \cdot y_{i+1} - c_i \cdot y_i + a_i \cdot y_{i-1} = -h^2 \varphi_i$$

на левом краю интервала составляет с краевым условием систему

$$\begin{cases} a_2 \cdot y_2 - c_1 \cdot y_1 + a_1 \cdot y_0 = -h^2 \varphi_1 \\ \\ \delta_0 \cdot y_0 + \delta_1 \cdot y_1 + \delta_2 \cdot y_2 = \mu_1 \end{cases} ,$$

из которой можно исключить y_2 , при этом система преобразуется в уравнение

$$y_0 = \alpha_1 \cdot y_1 + \beta_1$$

с некоторыми вполне определенными коэффициентами α_1 , β_1 . Действуя аналогично п. 4.12.2, можно записать разностную схему в виде уравнений

$$y_i = \alpha_{i+1} \cdot y_{i+1} + \beta_{i+1} \ , \qquad i = \overline{1, N-1} \qquad (40)$$

где коэффициенты α_{i+1} , β_{i+1} считаются по рекуррентным формулам (39), исходя из значений α_1 , β_1 . На правом конце отрезка получаем систему

$$\begin{cases} \delta_{N-2} \cdot y_{N-2} + \delta_{N-1} \cdot y_{N-1} + \delta_N \cdot y_N = \mu_2 \\ \\ y_{N-2} = \alpha_{N-1} \cdot y_{N-1} + \beta_{N-1} \\ \\ y_{N-1} = \alpha_N \cdot y_N + \beta_N \end{cases} ,$$

из которой можно найти y_N , а следом - и все остальные y_i (по рекуррентным формулам (40)).

Список литература

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.Л., Кобельков Г.М. Численные методы. М, Наука, 1987. - 600 с.
2. Калиткин Н.Н. Численные методы. М, Наука, 1978. - 512 с.
3. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Т. 1, М, Наука, 1976. - 432 с., Т. 2, М, Наука, 1977. - 400 с.
4. Самарский А.А. Введение в численные методы. М, Наука, 1987. - 235 с.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы, М, Наука, 1989. - 432 с.