Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Кулезнев Н. С. группа #22104

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Петрозаводск – 2023

Содержание

1 Описание работы

В первом задании мы знакомились с базисными понятиями и функциями LaTeX.
Во втором задании было необходимо переписать учебник.
В третьем задании было необходимо нарисовать график с помощью GNUplot и вставить его во второе задание.

2 Результаты работы

Благодаря практическим заданиям, я научился: обьявлять типы, создавать окружения, создавать заголовки и писать правильную преамбулу. Научился в целом писать документы в LaTeX.
Расскажу подробнее о заданиях:
Первое задание заключалось в создании простейшего документа и ввода формулы.
Второе задание представляло из себя набор текста и постоянный поиск математических символов в интернете. Оно получилось без каких-либо проблем. В этом задании я научился всему, что потребуется при создании документа.
Третье задание тоже получилось без каких-либо проблем. Я научился работать с GNUplot и строить графики функций.

Благодаря учебной практике, я нашел для себя мощный профессиональный редактор текстов. Он позволяет не только создавать красиво оформленные документы, но также дает пользователям возможность очень быстро реализовывать такие сложные элементы печатного набора, как математические выражения, таблицы, ссылки и библиографии, получая согласованную разметку по всем разделам.

2.1 Задание 2

Тогда множество E является кубируемым компактом и

$$\iiint\limits_{E} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{Exy} dxdy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz. \tag{1}$$

Если множество E_{xy} имеет вид (43.1), т. е.

где функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, то, применив в правой части формулы (1) формулу (43.6) к двойному интегралу по множеству E_{xy}, получим

$$\iiint\limits_{E} f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz. \tag{2}$$

Если обозначить через $E\left(x_0\right)$ сечение множества E плоскостью $x = x_0$, т.е.

$$E\left(x_0\right) = E \cap \{(x,y,z) : x = x_0\}$$

то при условии $x \in [a,b]$ включение $(x,y,z) \in E\left(x_0\right)$ равносильно включениям $\varphi_1(x) y \psi_1(x), \varphi(x,y) z$
(рис. 158).

Поэтому, объединив в формуле (2) два внутренних интегрирования по переменным y и z, получим формулу

$$\iiint\limits_{E} f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \iint\limits_{E(x)} f(x,y,z)dydz. \tag{3}$$

Например, если $f(x,y,z) \equiv 1$, то

$$\iiint\limits_E dxdydz = \mu_3 E, \quad \iint\limits_{E(x)} dydz = \mu_2 E(x),$$

где μ_3 - объем (трехмерная мера), а μ_2 - площадь (двумерная мера), и из формулы (3) следует, что

$$\mu_3 E = \int_a^b \mu_2 E(x) dx$$

т. е. объем тела E равен одномерному интегралу от площадей сечений $E(x)$.

Аналогично, для $n > 3$ при соответствующих предположениях справедлива формула

$$\underbrace{\iint \ldots \int}_{n \text{ раз}} f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \tag{4}$$

$$= \int\limits_a^b dx_1 \int\limits_{\varphi_1(x_1)}^{\psi_1(x_1)} dx_2 \int\limits_{\varphi_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})}^{\psi_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})} f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) dx_n.$$

Объединяя в (4) интегрирования по различным группам переменных, получим формулы типа формул (1) и (3):

$$\iint\limits_E \ldots \int f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \iint \ldots \int\limits_{E_{x_1!,x_2,\ldots,x_k}} dx_1 dx_2 \ldots dx_k \iint \ldots \iint\limits_{E_{x_1,x_2,\ldots,x_k}} f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) dx_{k+1} dx_{k+2} \ldots dx_n,$$

где $E_{x_1,x_2,\ldots,x_n}$ - проекция множества E на пространство точек $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, а $E_{x_1,x_2,\ldots,x_k}$ – сечение множества E, ортогональное этому пространству. В частности, при $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \equiv 1$ и $k = 1$ имеем

$$\mu_n E = \int_a^b dx_1 \iint\limits_{E_{x_1}} \ldots \int dx_2 dx_3 \ldots dx_n = \int_a^b \mu_{n-1} E\left(x_1\right) dx_1.$$

43.3. Объем n-мерного шара. Методом сведения кратного интеграла к повторному иногда удается вычислить значение кратного интеграла. Поясним это на примере получения формулы для величины объема n-мерного шара радиуса r. Пусть

$$V_r^n = \left\{x : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 r^2\right\}$$

— n-мерный шар радиуса r с центром в начале координат. Известно, что

$$\mu_2 V_r^2 = 2 \int\limits_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx = \pi r^2 \tag{5}$$

отсюда можно найти объем трехмерного шара следующим образом:

$$\mu_3 V_r^3 = 2 \int_0^r \mu_2 V^2_{\sqrt{r^2 - z^2}} dz = 2\pi \int_0^r \left(r^2 - z^2\right) dz = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Применим этот метод и для вычисления объема $\mu_n V_r^n$ шара V_r^n при произвольном $n = 1, 2, \ldots$ Пусть

$$\mu_{n-1}V = \kappa_{n-1}r^{n-1}$$

где κ_{n-1}– некоторая постоянная $\left(\kappa_2 = \pi, \kappa_3 = \frac{4}{3}\pi\right)$; тогда

$$\mu V_r^n = \iint\limits_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 r^2} \ldots \int dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= 2\int_0^r dx_1 \iint \ldots \int_{x_2^2+x_3^2+\ldots+x_n^2 r^2-x_1^2} dx_2 dx_3 \ldots dx_n =$$

$$= 2\int_0^r \mu_{n-1} V^{n-1}_{\sqrt{r^2-x_1^2}} dx_1 = 2\kappa_{n-1}\int_0^r \left(r^2 - x_1^2\right)^{(n-1)/2} dx_1 =$$
$$= x_1 = \frac{r\cos t}{2}\kappa_{n-1} r^n \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt = \kappa_n r^n, \quad \kappa_n = 2\kappa_{n-1}\int_0^{\pi/2} \sin^n t dt.$$

Получившийся интеграл был вычислен раньше (см. формулу (26.4)), откуда

$$\kappa_n = \begin{cases} 2\kappa_{n-1}\frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2} & \text{при} \quad n = 2m, \\ 2\kappa_{n-1}\frac{(n-1)!!}{n!!} & \text{при} \quad n = 2m+1, \end{cases} \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, для коэффициентов κ_n получена рекурентная формула. Последовательно ее применяя, получим

$$\kappa_{2m} = \frac{\pi^m}{m!}, \quad \kappa_{2m+1} = \frac{2(2\pi)^m}{(2m+1)!!}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

43.4. Независимость меры от выбора системы координат. При определении меры множества в п. 42.1 остался невыясненным вопрос о независимости меры от выбора системы координат. Мера множеств определяется посредством многогранников, состоящих из кубов, ребра которых параллельны координатным осям, поэтому вопрос о независимости меры множеств от выбора системы координат сводится к независимости объемов кубов от этого выбора. Отношение объемов одного и того же куба, вычисленное в разных системах координат, не зависит от выбора куба, так как любые два куба с ребрами, параллельными координатным осям одной системы координат, могут быть получены один из другого с помощью параллельного переноса и гомотетии с центром в совмещенных центрах кубов. Если указанное отношение равно единице, то мера множества не зависит от выбора системы координат.

Пусть в пространстве R^n имеется две системы координат. Меру множества, определенную с помощью первой из них, обозначим через μ, а с помощью второй - через $\widetilde{\mu}$. Пусть $Q - n$-мерный куб с ребрами, параллельными координатным осям первой координатной системы.

Граница куба Q является объединением его граней, они могут быть представлены как графики непрерывных функций на соответствующих компактах и потому имеют меру нуль в любой системе координат. Следовательно, и вся граница куба Q имеет меру нуль, что влечет за собой измеримость самого куба Q в любой системе координат. Пусть

$$\widetilde{\mu} Q = \lambda \mu Q \tag{6}$$

2.2 Задание 3

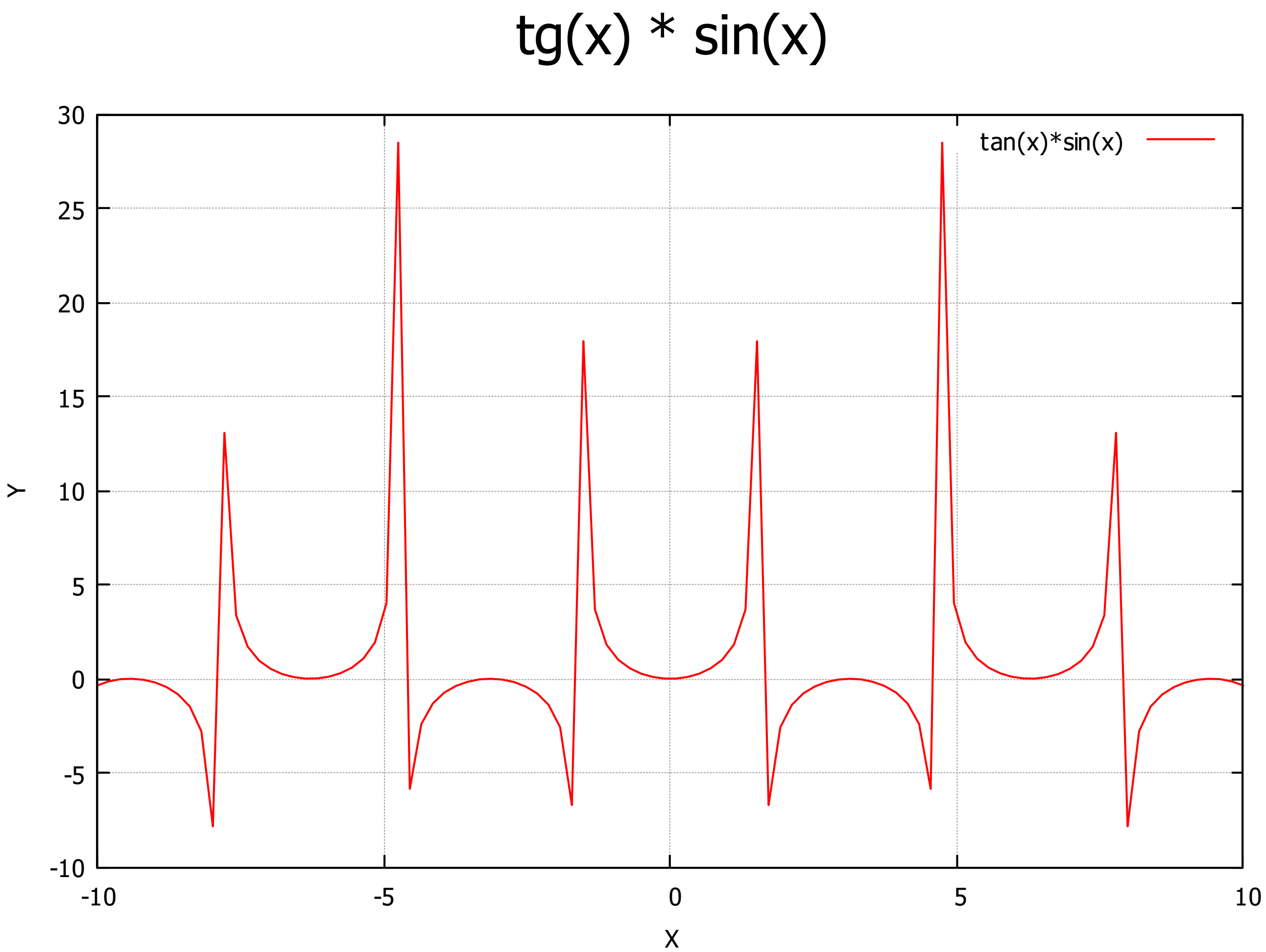

Рис. 1: tg(x)*sin(x)