Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Митрофанов А. А. группа 22103

____
подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2023

Содержание

1 Описание работы

В ходе лабораторных работ были изучены основы написания программ на языке LaTeX.

В первой лабораторной работе мы научились транслировать LaTeX файл в разные фор- маты, изучили структуру LaTeX файла и команды, из которых состоит программа.

Во второй лабораторной работе мы создавали математический текст, предоставленный руководителем практики в формате PDF из учебника Кудрявцева Л.Д. "Краткий курс математического анализа". В нем мы набирали математические формулы, добавляли рубрикацию текста, специальные абзацы, колонтитулы, создавали автоматическое добавление разделов и нумераций формул.

В третьей лабораторной работе мы добавляли в документ, созданный во второй лабора- торный работе, график функции, созданный при помощи программы gnuplot, в которой при помощи команд мы задавали параметры необходимого нам графика.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

29.5. Абсолютно сходящиеся интегралы. Как и выше, будем предполагать, что функция f задана на полуинтервале $[a, b)$, $-\infty <$

<a<b $\leqslant +\infty$, и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, \eta]$, $a < \eta < b$

Определение 1. *. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется*

абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$.

Теорема 1 (критерий Коши абсолютной сходимости интеграла)**.** *Для того чтобы интеграл $\int_a^b f(x)dx$ абсолютно сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\eta, a \leqslant$*

$\leqslant \eta < b$, что если $\eta < \eta' < b, \quad \eta < \eta'' < b$, то

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} \right| f(x)|dx| < \varepsilon \tag{1}$$

$\triangleright$ Применив критерий Коши сходимости несобственного интегралала.

Теорема 2 (Если несобственный интеграл абсолютно сходится, то он и просто сходится.)**.**

$\triangleright$ Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ абсолютно сходится, то согласно необходимости выполнения условий критерия Коши абсолютной сходимости

интеграла для любого $\varepsilon > 0$ существует такое η, что если

$$\eta < \eta' < b, \quad \eta < \eta'' < b \tag{2}$$

То

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} \right| f(x)|dx| < \varepsilon. \tag{3}$$

Но

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx \right| \leqslant \left| \int_{\eta'}^{\eta''} \right| f(x)|dx|, \tag{4}$$

поэтому,если выполнено условие (29.28), то

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx\right|_{(29.30)(29.29)}^{<} \varepsilon. \tag{5}$$

димости интеграла из (29.28) и (29.31) следует сходимость интеграла

$$\int_a^b f(x)dx \tag{6}$$

Если интеграл от абсолютной величины функции сходится, то она называется абсолютно интегрируемой (в несобственном смысле) на соответствующем промежутке.

Теорема 4 показывает, что если функция абсолютно интегрируема, то она и просто интегрируема в несобственном смысле. Обратное утверждение неверно. Действительно, рассмотрим интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \tag{7}$$

Прежде всего, если доопределить подынтегральную функцию при $x = 0$ единицей, то, поскольку $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, получившаяся функция будет непрерывной, а следовательно, интегрируемой по Риману на любом отрезке $[0, \eta], \eta > 0$. Поэтому определение 1 несобственного интеграла **??** имеет смысл. Кроме того, интеграл 7 сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \tag{8}$$

Для выяснения сходимости этого интеграла проинтегрируем его по частям: если в результате получатся выражения, имеющие смысл и принимающие конечные значения, то это будет являться обоснованием возможности интегрирования по частям и будет означать сходимость интеграла 8. Имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} d\cos x = -\left.\frac{\cos x}{x}\right|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \cos x d\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$=\cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$

(9)

Получившийся интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \tag{10}$$

абсолютно сходится, ибо $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится. Следовательно, интегралы 10, а потому и 8 сходятся. Покажем теперь, что интеграл 8 не сходится абсолютно, т. е. что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ расходится. Из неравенства следует, что для любого $\eta > 0$ выполняется неравенство

$$\int_1^{\eta} \frac{|\sin x|}{x} dx \geqslant \frac{1}{2}\int_1^{\eta} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_1^{\eta} \frac{\cos 2x}{x} dx \tag{11}$$

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится, т. е. $\lim_{\eta\to+\infty} \int_1^{\eta} \frac{dx}{x} = +\infty$, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ сходится. Действительно, аналогично случаю интеграла 8 имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} d(\sin 2x) = \left.\frac{\sin 2x}{2x}\right|_1^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \sin 2x d\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$=$-$\sin 2\frac{}{2+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2}dx(12)}$ и поскольку $\left|\frac{\sin 2x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$, то интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2}dx$ абсолютно сходится, а следовательно, и просто сходится.

Поэтому из равенства 12 следует, что интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2}dx$ сходится, т. е. существует конечный предел

$$\lim_{\eta\to+\infty}\int_1^{\eta}\frac{\cos 2x}{x^2}dx = \int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2}dx \tag{13}$$

Из неравенства 10 и выполнения условий 11 и 13 получаem

$$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx = \lim_{\eta\to+\infty}\int_1^{\eta}\frac{|\sin x|}{x}dx = +\infty \tag{14}$$

т.е. действительно интеграл 8 не сходится абсолютно.

Замечание. Отметим одно простое свойство абсолютно сходящихся интегралов. Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ абсолютно сходится, а функция $g(x)$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[a,\eta] \subset [a,b)$

2.2 Задание 3

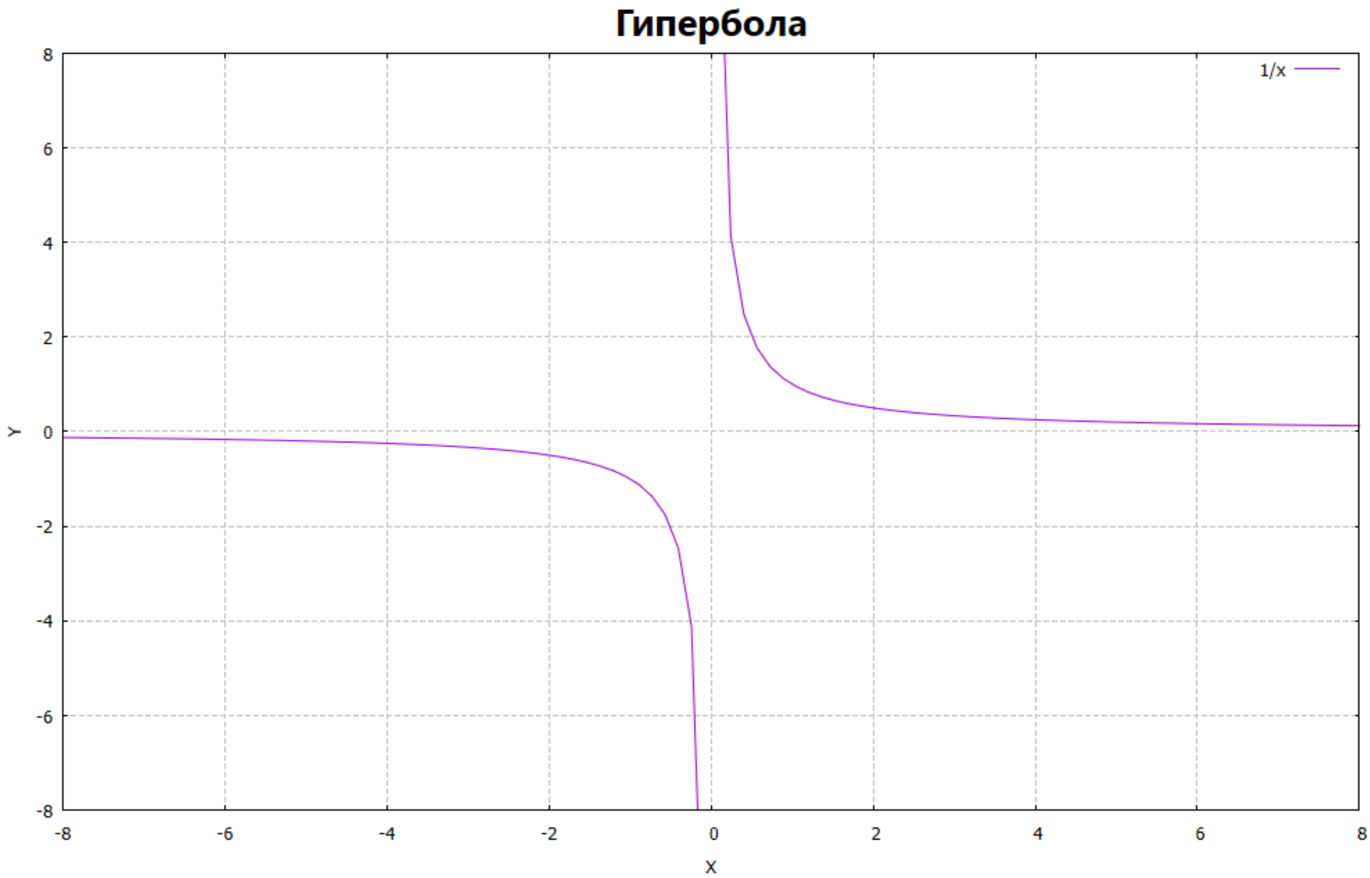

Рис. 1: График гиперболы