Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Федоров С. В. группа 2103

____

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____

подпись

Итоговая оценка:

____

оценка

Петрозаводск – 2023

Содержание

1 Описание работы

Я успешно завершил две задачи. Во втором задании я создал документ с математическим текстом, предоставленным инструктором, используя LaTeX. Я добавил разделы и автоматическую нумерацию формул, а также создал новые окружения для примеров, определений и других математических объектов. В третьей задаче я построил кривую в декартовых координатах, используя интерпретатор команд gnuplot, и добавил это изображение в документ, который я создал во втором задании. В процессе работы я изучал скринкасты и использовал учебники из предложенной литературы. Результаты моей работы, я предоставил ниже.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

$\int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, а интеграл $\int\limits_0^1 f^2(x)dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$ расходится.
Примеры. 1. Посредством замены переменной $x = 1/t$ вычислим интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = arcsint|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

2.Вычислим интеграл $I_n = \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$,$n = 0, 1, 2, \cdots$ Проинтегрировав по частям при n > 0, будем иметь

$$I_n = -\int\limits_0^{+\infty} x^n de^{-x} = -x^n e^{-x} \mid_0^{+\infty} + n\int\limits_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = nI_{n-1}. \tag{1}$$

Поскольку $I_0 = -\int\limits_0^{+\infty} x^n de^{-x} = -x^n e^{-x}|_0^{+\infty} + n\int\limits_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = nI_{n-1}$, то, применив последовательно рекурсивную формулу (**??**), получим:

$$I_n = nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = \cdots = n!I_0 = n!$$

.

29.3. Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Установим признаки сходимости для несобственных интегралов от неотрицательных функций.

Лемма 1 . *Если функция f неотрицательна на полуинтервале $[a, b)$, то для сходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы множество всех интегралов $\int\limits_a^b f(x)dx, n \in [a, b)$, было ограничено сверху, т.е. чтобы существовала такая постоянная $c > 0$, чтобы для всех $n \in [a, b)$ выполнялось бы неравенство*

$$\int\limits_a^{\eta} f(x)dxc. \tag{2}$$

▷ Положим

$$\phi(\eta) =^{def} \int\limits_a^{\eta} f(x)dx. \tag{3}$$

Еслиа$n < n' < b$, то

$$\phi(\eta') = \int\limits_a^{\eta'} f(x)dx = \int\limits_a^{\eta} f(x)dx + \int\limits_{\eta}^{\eta'} f(x)dx \int\limits_a^{\eta} f(x)dx = \phi(\eta)$$

,ибо в силу неотрицательности функции f имеет место неравенство $\int\limits_{\eta}^{\eta'} f(x)dx0$, т.е. функция $\phi(\eta)$ возрастает на прлуинтервале $[a, b)$. Существование несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ означает существование конечного предела

$$\lim_{\eta\to b} \int\limits_a^b f(x)dx,$$

что имеет место тогда и только тогда, когда функция $\phi(\eta)$ ограничена сверху (см. теорему 4 в п. 6.11), а это в силу (**??**) равносильно условию (**??**). ◁
Замечание. При доказательстве леммы 1 было показано, что в случае неотрицательности функции f функция $\phi(\eta)$ (см. (**??**)) вод- растает на $[a, b)$ и, следовательно, всегда имеет при $\eta \to \phi$ конечный или бесконечный, равный $+\infty$, предел в зависимости от того, ограничена она или нет. Если функция $\phi(\eta)$ неограничена на [a,b), то

$$\lim_{\eta\to b} \int\limits_a^b f(x)dx =_{(??)} \lim_{\eta\to b} \phi(\eta) = +\infty,$$

и в этом случае пишут

$$\int\limits_a^b f(x)dx = +\infty$$

(как мы уже и поступали в примерах п. 29.1).

Теорема 1 *(признак сравнения). Пусть*

$$0g(x)f(x), x \in [a, b). \tag{4}$$

Тогда:

1. *если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$;*

2. *если интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ расходится и $0 < k+\infty$, то расходится и интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.*

Следствие 1 *. Пусть функции f и g неотрицательны на промежутке $[a, b), g(x) \neq 0$ при всех$x \in [a, b)$ и существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = k. \tag{5}$$

Тогда:

1. *если интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится и $0k < +\infty$ то и интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится;*

2. если интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ *расходится и* $0 < k{+}\infty$ *то и интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *расходится;*

Следствие 2 . *Если функции f(x) и g(x) эквивалентны при* $x \to b$*, т.е.* $f(x) = \phi(x)g(x), ax < b, \lim\limits_{x\to b}\phi(x) = 1$*, то интегралы* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *и* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *одновременно сходятся и расходятся.*

▷ Докажем теорему. Для любого $\eta \in [a, b)$ в силу неравенства (**??**) имеем

$$\int\limits_a^\eta g(x)dx \int\limits_a^\eta f(x)dx.$$

Поэтому если интеграл$\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится и, следовательно, согласно лемме 1 ограничен сверху интеграл $\int\limits_a^\eta f(x)dx$, то будет ограничен сверху и интеграл $\int\limits_a^\eta g(x)dx$ откуда, согласно той же лемме, интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится.

Если же расходится интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$, то в силу уже доказанного интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ не может сходится, так как тогда бы сходился и интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$, а это противоречит условию. Таким образом, интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится.◁

Докажем теперь следствие 1.

▷ Пусть выполняется условие (**??**) и $0k < +\infty$. Из того, что k является пределом функции $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to b$, и из неравенства $k < k+1$ следует существование такого $\eta \in [a, b)$, что если $\eta < x < b$, то $\frac{f(x)}{g(x)} < k+1$, т.е.

$$f(x) < (k+1)g(x). \tag{6}$$

2.2 Задание 3

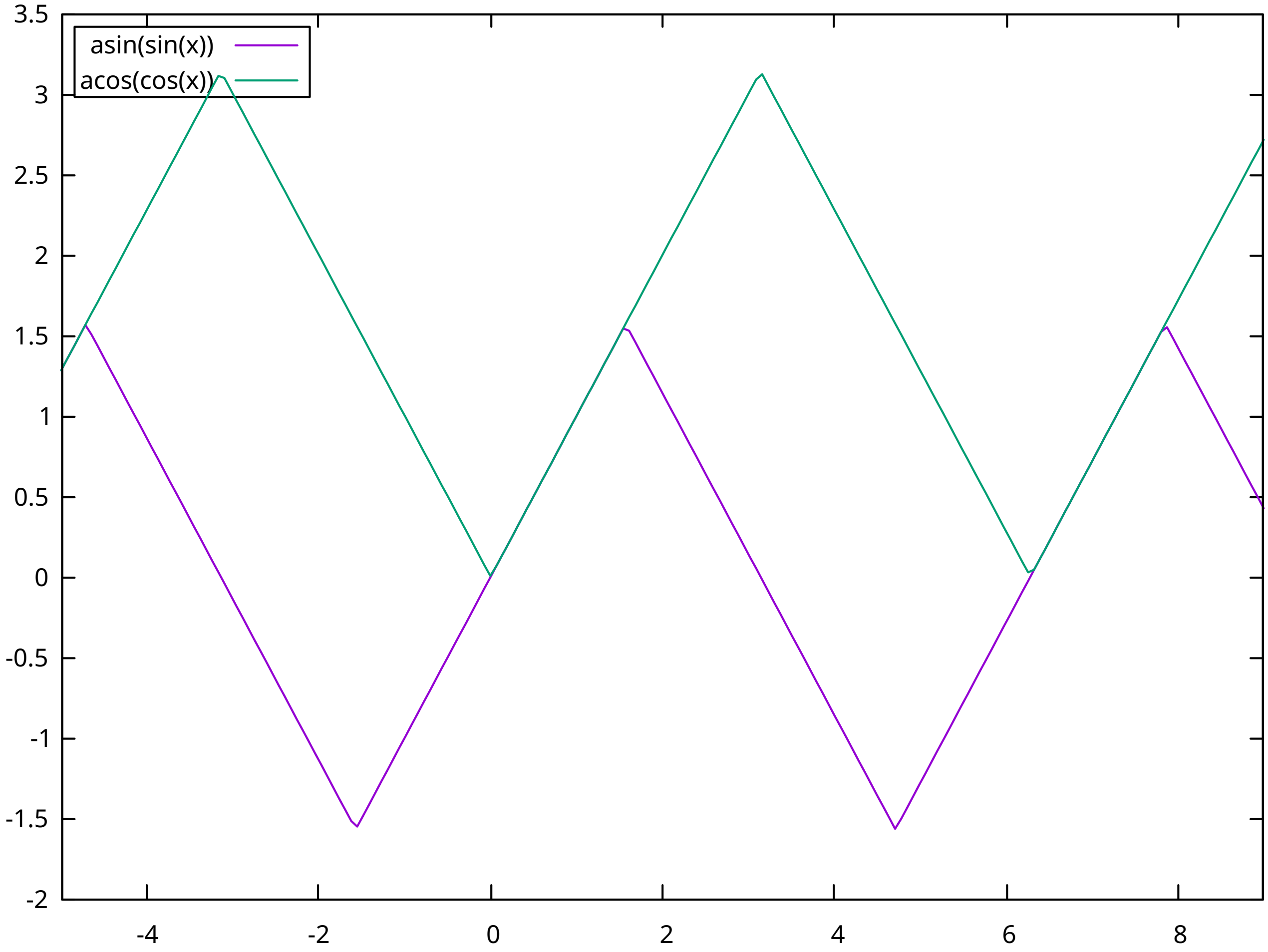

Рис. 1: Графики