Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Фарисеев П. П. группа 22104

____
подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент И. В. Сосновский

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2023

Содержание

1 Описание работы

В задании 2 нам нужно было подготовить документ, содержащий математический текст, предоставленный инструктором. Данный документ нам нужно было переписать из томов "Краткий курс математического анализа". Нам были даны материалы в виде "скринкастов"представляющие собой видео-уроки. В ходе работы мы познакомились с различными функциями, формулами, специальными символами.

Задание 2 требует обязательное наличие знаков $. Формулы внутри текста окружаются знаками с обеих сторон. Выключные формулы окружаются парами знаков $$ с обеих сторон. Так же в ходе работы применялись **степени** и **индексы** . **Дроби**, обозначаемые косой чертой. Знаки **"строгих"неравенств** набираются, как знаки $>$ и $<$ и нестрогих неравенств, знак "больше или равно"генерируется командой $\backslash ge$, "меньше или равно"— командой $\backslash le$

Задание 3 требует знакомство с интерпретатора команд gnuplot. Была поставлена задача построить изображение кривой в декартовых координатах и разместить его в документе, подготовленном во время выполнения задания 2.

"Скринкасты"значительно упрощают изучение материала, а так же использование литературных источников предложенных в ходе работы.

В задании 3 мы использовали такие параметры и функции, как *terminal, output, reset, xrange и yrange, plot* Они позволяют натсроить куда будет выполнен вывод графика; его имя файла или устройства для вывода данных; позволяет убрать все изменения в настройках программы, сделанные пользователем; устанавливает диапазон независимой переменной, в котором будет рисоваться график и само создание графика и вывод его на экран.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

в п. 6.7; во-вторых, функции x^k, $k = 1$, 2, ..., также непрерывны на всей числовой оси (см. пример в п. 7.3), а любой многочлен $_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$является линейной комбинацией функций $1, , ^2, \ldots , ^n$с коэффициентами a_0, a_1, $\ldots$, a_nпоэтому, согласно следствию из свойства 6° пределов функции в п. 6.7, он непрерывен на всей числовой оси. $\triangleright$

Теорема 2. Рациональная функция $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где P(x) и Qx) — многочлены, непрерывна во всех точках числовой оси, в которых Q(x) $\neq$ 0.

$\triangleleft$ Это сразу следует из непрерывности многочленов () и $Q(x)$ на всей числовой о и и непрерывности частного непрерывных функций во всех точках, в которых знаменатель не обращается в нуль (см. следствие из свойства 6° пределов функций в п. 6.7). $\triangleright$

8.2. Показательная и логарифмическая функции.

Перечислим основные свойства степеней a^r, а $>$ 0, с рациональными показателями $r \in Q$ (см. п. 2.1).

1°. Пусть $r_1 < r_2$. Если $a > 1$, то $a^{r_1} < a^{r_2}$, а если а $<$ 1, то $a^{r1} > a^{r_2}$.

2°.$a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$.

3°.$(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$

Эти свойства доказываются в курсе элементарной математики в предположени и существования и однозначной определенности a^r для любого рационального r, а $>$ 0, а это было доказано в п. 7.3.

Вспомним еще, что $a^0 = 1$ и что $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$.

Из свойства 1° вытекает , что для любого $r \in Q$ выполняется не равенство $a^r > 0$. В самом деле, если $a \geq 1$ и $r \geq 0$, то по свойству 1° $a^r \geq a^0 = 1 > 0$. Отсюда следует, что $a^{-r} = \frac{1}{r^r} > 0$. Аналогично рассматривается случай 0 $<$ а $<$ 1.

Нашей ближайшей задачей является определение значения выражения a^x для любого действительного числа и > 0. Затем будут изучены свойства функции a^x

Лемма 1. Для любого а $>$ 0 имеет место

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = 1 \tag{1}$$

Следствие. Для любого а $>$ 0 имеет место равенство

$$\lim_{r\to 0, r\in Q} a^r = 1 \tag{2}$$

$\triangleright$ Пусть сначала а $>$ 1. Для любого $n \in N$ положим

$$x_n = a^{1/n} - 1 \tag{3}$$

Поскольку $\frac{1}{n} > 0$,то $a^{1/n} > a^0 = 1$ и, следовательно,

$$x_n > 0, n = 1, 2, ... \qquad (4)$$

Из (8.3) и (8.4) вытекает, что

$$a = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + ... > nx_n.$$

Отсюда и из неравенства (8.4) получаем $0 < n < \frac{a}{n}$, а так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n}$ $= 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, что в силу (8.3) и означает, что

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1 \qquad (5)$$

Если a $<$ 1, то b $= \frac{1}{a} >$ 1, и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b^{1/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b^{1/n}} \underset{(8.5)}{=} 1$$

Наконец, если a $=$ 1, то утверждение (8.1) очевидно, так как

$$1^{1/n} = 1, n = 1, 2, ...$$

Из доказанного следует, что при любом a $>$ 0 имеет место и равенство

$$\lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n}} = 1 \triangleright$$

Докажем следствие. $\triangleleft$ Для всех > 0 функция a^r монотонна на множестве рациональных чисел Q. Для каждого действительного числа множества рациональных чисел $r < x$ и $r > x$ не пусты и точка является их точкой прикосновения. Поэтому, согласно следствию из теоремы 4 п. 6.11, существуют односторонние пределы $\lim\limits_{r\to x-0} a^r$ и $\lim\limits_{r\to x+0} a^r, r \in Q$. В частности, указанные пределы существуют для x $=$ 0. Согласно определению предела функции в терминах последовательностей их значения равны соответственно значению последовательностей a^{r_n} при любых последовательностях $r_n < 0$ и $r_n > 0$, стремящихся к нулю, $r_n \in Q$, n $=$ 1, 2, ... Выбрав $r_n{=}{-}\frac{1}{n}$ и $r_n{=}\frac{1}{n}$, для которых пределы уже вычислены (см. (8.1)), в силу сказанного получим

$$\lim_{r\to -0} a^r = \lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = 1, \lim_{r\to +0} a^r = \lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1 \qquad (6)$$

,т. е. односторонние пределы в точке x $=$ 0 функции a^r, $r \in Q, r \neq 0$, равны и, следовательно, согласно теореме 2 п. 6.6, существует двусторонний предел $\lim\limits_{r\to 0, r\neq 0} a^r = 1$. Он совпадает со значением $a^0 = 1$

функции a^r при r $= 0$, п поэтому (см. лемму 5 в п. 6.9) она непрерывна в нуле

$$\lim_{r\to 0} a^r = a^0 = 1, r \in Q, a > 0.$$

Равенство (8.2) доказано. $\triangleleft$ Определение. Пусть $a > 0$ и x $\in R$. Определим a^x как предел a^r по множеству рациональных чисел Q, когда $r \to x$, т.е.

$$a^x = \lim_{r\to\infty r\in Q} a^{\ r} \tag{7}$$

Докажем, что это определение корректно, т.е. покажем, используя критерий Коши для предела функции (см. теорему 5 в п. 6.12), что предел (8.7) существует. $\triangleright$ $a \geq 1$ и $x \in R$. В силу принципа Архимеда существует натуральное n такое, что

$$n > x \tag{8}$$

Зададим произвольно $E > 0$. Согласно следствию леммы 1 существует такое $\partial > 0$, что для всех рациональных r, удовлетворяющих неравенству

$$|r| < \partial, \tag{9}$$

выполняется равенство

$$|a^r - 1| < \frac{E}{a^n} \tag{10}$$

Если это условие выполняется для некоторого $\partial > 0$, то оно заведомо выполняется и для всякого меньшего положительного ∂. Поэтому указанное $\partial > 0$ можно всегда выбрать так, чтобы выполнялось неравенство (см. (8.8))

$$x + \frac{\partial}{2} < n. \tag{11}$$

Если рациональные числа r' и r'' принадлежат $\frac{\partial}{2}-$окрестности точки x

$$r' - x < \frac{\partial}{2}, r'' - x < \frac{\partial}{2}$$

, и, следовательно,

$$|r'' - r'| \leq |r'' - x| + |x - r'| < \frac{\partial}{2} + \frac{\partial}{2} = \partial, \tag{12}$$

то, заметив, что $r' < x + \frac{\partial}{2} <$ n, будем иметь

$$|a^{r''} - a^{r'}| = a^{r'}|a^{r''-r'} - 1| < a^n|a^{r''-r'} - 1| < a^n\frac{E}{a^n} = E.$$

Таким образом, для произвольно заданного $E > 0$ существует такое $\partial >$ 0, что из выполнения условий $|r' - x| < \frac{\partial}{2}, |r'' - x| < \frac{\partial}{2}$вы-

2.2 Задание 3

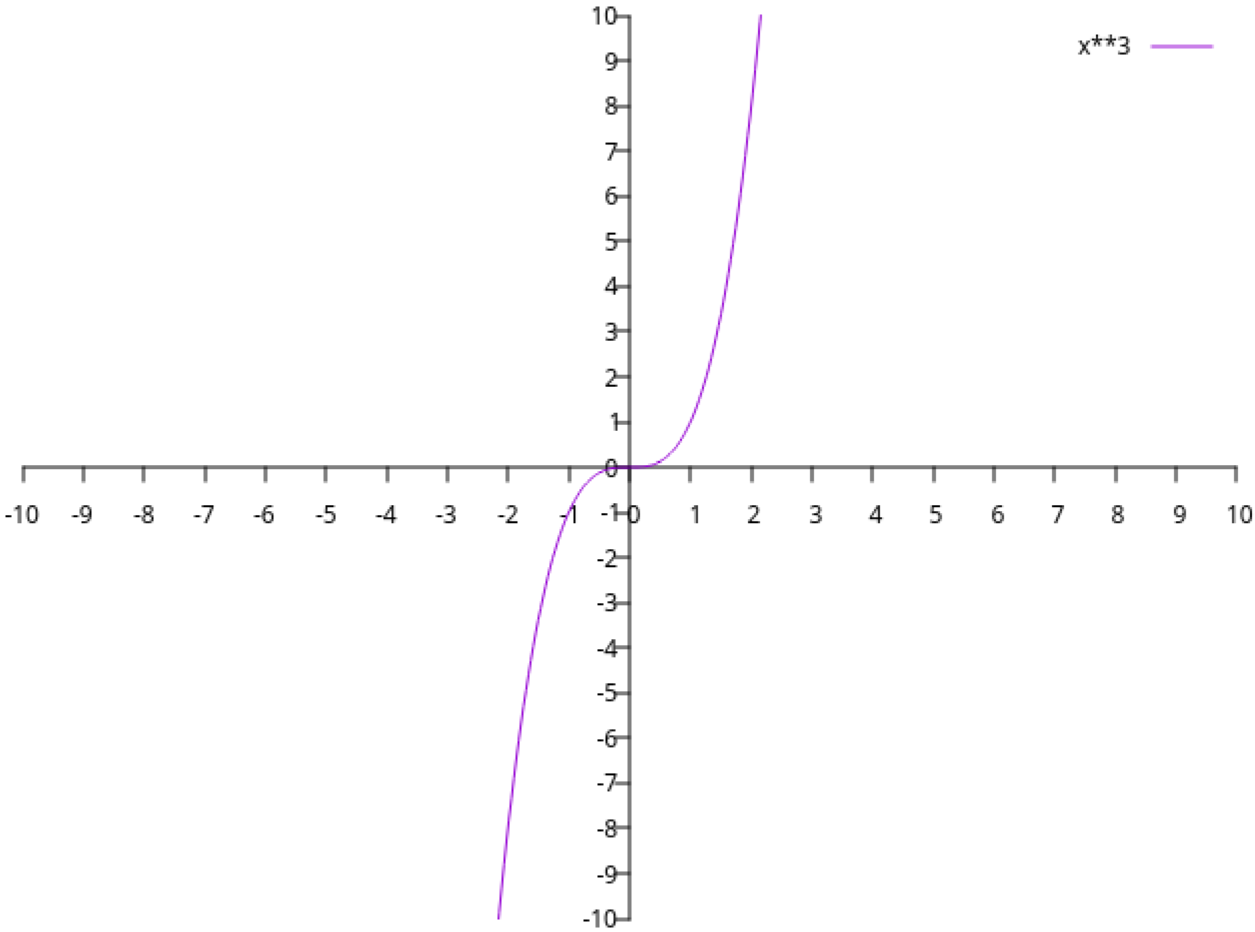

Рис. 1: graph