Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Бальцер Е. группа 22104

____
подпись

Руководитель практики:
Димитров Вячеслав Михайлович

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2023

Содержание

1 Описание работы

Отчет о выполненных заданиях практики

Введение В данном отчете описывается выполнение заданий практики в установленный срок. Практика включала использование LaTeX и gnuplot для создания математических документов, построения изображений и подготовки отчета по практике. Задания были выполнены следующим образом:

Задание 1: Загрузка и перевод документа LaTeX Первое задание состояло в том, чтобы загрузить файл first-example.tex в редактор emacs, добавить оригинальный абзац текста, содержащий как минимум одну группу и два специальных символа, перевести оригинальный файл и создать документ в форматах dvi, postscript и pdf. Кроме того, требовалось сделать скринкаст по структуре документа LaTeX. Это задание было выполнено в срок до 2.28.2023.

Задание 2: Математические тексты и среды Второе задание включало подготовку документа, содержащего математический текст, предоставленный преподавателем, скринкаст набора математических формул, скринкаст по рубрикации текста и специальным параграфам, а также скринкаст по настройке новых сред (теорем, лемм и т.д.) и команд. В задании требовалось автоматически спроектировать разделы, если таковые имеются, и нумерацию формул. Это задание было выполнено в срок до 4.11.2023.

Задание 3: Построение изображения с помощью gnuplot В задании 3 требовалось с помощью командной строки gnuplot построить изображение кривой в декартовых координатах и поместить его в документ, подготовленный в ходе выполнения задания 2. Кроме того, требовалось показать экранные ролики о работе с gnuplot и плавающими объектами. Это задание было выполнено в срок до 16.05.2023.

Задание 4: Отчет по практике Последнее задание требовало подготовки отчета по практике с использованием LaTeX и представления его в печатном виде. Отчет должен был включать исходный текст и электронный отчет в формате pdf. Был предоставлен шаблон для подготовки отчета. Это задание было выполнено в срок до 5.23.2023.

Заключение В заключение следует отметить, что все задания стажировки были выполнены в установленные сроки. Задания требовали использования LaTeX и gnuplot для создания математических документов, построения изображений и подготовки отчета по практике. Выполнение этих заданий позволило практиканту приобрести ценные навыки работы в LaTeX и gnuplot, которые могут быть использованы в будущих академических и профессиональных начинаниях.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

В этом случае пишут

$$f \sim g, \quad x \rightarrow x_0.$$

Замечание 1. Если $x_0 \in X$, то, как известно (см. п. 6.2), из существования предела $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$ следует, что $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)=\varphi\left(x_0\right)$. Поэтому в случае (9.24) имеем $\varphi\left(x_0\right)=0$, а в случае (9.26) $-\varphi\left(x_0\right)=1$. Если $f=o(g), x \rightarrow x_0$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)=0$, то функция f называется бесконечно малой более высокого порядка, чем бесконечно малая g.В случае $f=o\left(g^n\right), x \rightarrow x_0$, бесконечно малую f называют бесконечно малой порядка n относительно бесконечно малой g.

Замечание 2. Если в условиях определений 3 или 4 функция g не обращается в нуль на множестве $X \cap U$ и $x_0 \notin X$, то условие (9.24) можно записать в виде

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}=0$$

а условие (9.26) - в виде

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Замечание 3. Если $x_0 \notin X$ и существует конечный предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k$$

то функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ ограничена на пересечении некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 с множеством X (см. свойство 1° пределов функций в п. 6.7), т. е. существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in \in X \cap U(x_0)$ выполняется неравенство $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant c$, т. е.

$$|f(x)| \leqslant c|g(x)|$$

откуда следует, что при выполнении условия (9.29) имеет место соотношение

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \to x_0.$$

Замечание 4 . В определениях $1-4$ функции f и g могут быть последовательностями $f = \{x_n\}, g = \{y_n\}$, и, таким образом, указанные определения содержат в себе определения следующих понятий:

а) последовательности, ограниченной относительно другой последовательности: $x_n = O(y_n), n \to \infty$;

б) последовательностей одного порядка: $x_n \cong y_n, n \to \infty$;

в) асимптотически равных последовательностей: $x_n \sim y_n, n \to \infty$;

г) последовательности, бесконечно малой по сравнению с другой последовательностью: $x_n = o(y_n), n \to \infty$.

П р и ме р ы. 1. $\sin 2x = O(x), x \to 0$, ибо

$$|\sin 2x| \leqslant 2|x|$$

Верно и соотношение $x = O(\sin 2x), x \to 0$, ибо существует конечный предел $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}$, и, следовательно, функция $\frac{x}{\sin 2x}$ ограничена в некоторой окрестности $U(0)$ точки $x = 0$ (см. свойство 1° пределов функций в п. 6.7). Иначе говоря, существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in U(0)$ выполняется неравенство $\left|\frac{x}{\sin 2x}\right| \leqslant c$, $x \neq 0$, поэтому

$$|x| \leqslant c|\sin 2x|, \quad x \in U(0).$$

Из (9.30) и (9.31) следует, что при $x \to 0$ функции $y = x$ и $y = \sin 2x$ одного порядка:

$$\sin 2x \cong x, \quad x \to 0$$

2. $x^3 = o\left(x^2\right), x \to 0$, ибо $x^3 = x \cdot x^2$ и $\lim_{x\to 0} x = 0$.

3. $x^2 = o\left(x^3\right), x \to \infty$, ибо $x^2 = \frac{1}{x} \cdot x^3$ и $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

4. Поскольку $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то функции $y = x$ и $y = \sin x$ эквивалентны при $x \to 0$:

$$\sin x \sim x, \quad x \to 0$$

Замечание 5 . Символы $O(g)$ и $o(g)$ по существу обозначают целые классы функций, обладающих по сравнению с данной функцией определенным свойством, поэтому равенства типа $f(x) = O(g(x))$ и $f(x) = o(g(x)), x \to x_0$, следует читать только слева направо, например, $x^2 = o(x), x \to 0$. Здесь верно то, что функция $y = x^2$ является при $x \to 0$ бесконечно малой по сравнению с функцией $y = x$, но не всякая функция, бесконечно малая по сравнению с функцией $y = x$, является функцией $y = x^2$. Равенства с символами O и о не обладают и рядом других свойств равенств, например, свойством транзитивности:

$$x^2 = o(x), \quad x^3 = o(x), \quad x \to 0,$$

Но $x^2 \neq x^3$.

9.3. Эквивалентные функции. Примеры эквивалентных функций (см. определение 3 в п. 9.2) легко получить из результатов в п. 9.1:

$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \mathrm{l\Pi}(1+x) \sim e^x - 1, \quad x \to 0.$

Теорема 1. Для того чтобы функции $f(x)$ и $g(x)$ были эквивалентны при $x \to 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x) = g(x) + o(g(x)), \quad x \to 0.$$

$\triangleright$ Формула (9.32) является просто другой записью определения 4. Действительно, условие (9.26) $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 1$ равносильно условию $\varphi(x) = 1 + \varepsilon(x)$, где $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Поэтому условие

$$f(x) = \varphi(x) g(x), \quad \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 1,$$

равносильно условию

$$f(x) = (1 + \varepsilon(x)) g(x) = g(x) + \varepsilon(x) g(x), \quad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0,$$

т. е. условию $f(x) = g(x) + o(g(x)), x \to x_0$.$\triangleleft$

3 амеч ан и е 1 . Если $g(x) \neq 0, x \in X, x \neq x_0$, то условие (9.32) можно записать в виде

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0$$

Оно означает, что относительная погрешность $\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}$ между эквивалентными функциями f и g является бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$.

Пример 5. $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right), x \rightarrow 0$. Чтобы в этом убедиться, в силу теоремы 1 достаточно показать, что $\operatorname{ctg} x \sim \frac{1}{x}, x \rightarrow 0$. Это же сразу следует из того, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$ (см. п. 9.1), ибо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} x}{1 / x}=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x}=1.$$

Теорема 2. Если $f(x) \sim f_1(x), g(x) \sim g_1(x), x \rightarrow x_0$, то пределы (конечные или бесконечные) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ одновременно существуют или нет, при этом, если они суцествуют, то они равны

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

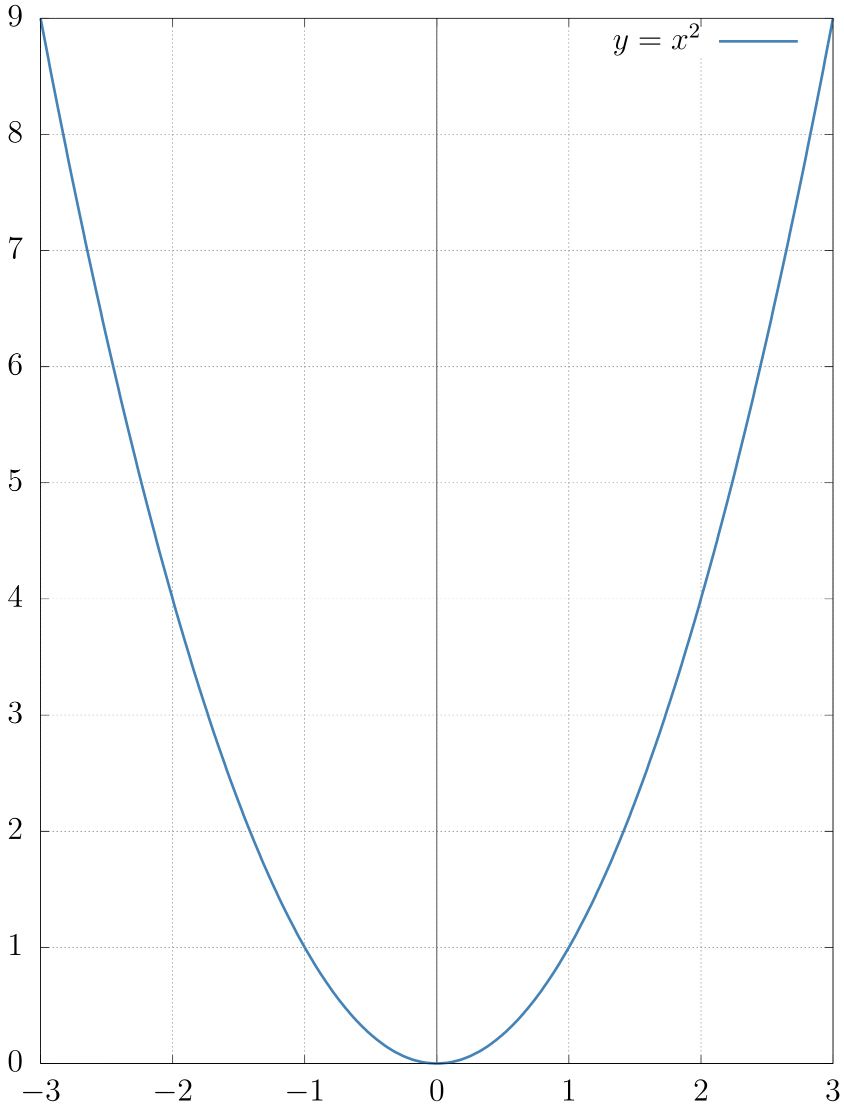
$\triangleright$ Условия $f \sim f_1$ и $g \sim g_1, x \rightarrow x_0$ означают, что существуют такие окрестность $U=U\left(x_0\right)$ и функции φ и ψ, определенные на пересечении $X \cap U$, что

$$\begin{gathered}
f(x)=\varphi(x) f_1(x), \quad g(x)=\psi(x) g_1(x), \quad x \in X \cap U, \\
\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)=\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x)=1.
\end{gathered}$$

Поэтому функции $\frac{f(x)}{g(x)}$ и $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ отличаются друг от друга на множитель $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, имеющий в точке x_0 предел, равный 1 :

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

2.2 Задание 3


9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
$y = x^2$
−3
−2
−1
0
1
2
3