Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ “Петрозаводский государственный университет”
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Золотарев М. А. группа #22104

____

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____

подпись

Итоговая оценка:

____

оценка

Петрозаводск — 2023

Содержание

1 Описание работы **3**

2 Результаты работы **4**

2.1 Задание 2 4

2.2 Задание 3 7

1 Описание работы

На первом курсе второго семестра я впервые познакомился с такой программой как LaTex, которая помогает в написании сложных математических формул. На первом занятии я узнал о том, как правильно сделать конвертацию файла .tex в .pdf и .dvi, а так же ознакомился со спецсимволами. Во второй работе я научился правильно набирать математические формулы, выводить их в центр страницы используя спецсимволы и т.д. В третьей работе я поработал с новой программой, а именно с gnuplot, с помощью неё я смог построить график asin(x) и acos(x). Помимо построения графика, его нужно было добавить на отдельный лист к прошлой работе, что я успешно и сделал. Чтобы разобраться в том как и что делать, мне помогали скринкасты своего преподователя - О. Ю. Богоявленской, а так же литературные исчтоники, такие как Котельников, И. А. "LaTeX по-русски".

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

(для заданного ряда m и k зависят от $n = k + m$); при этом условие стремления n к бесконечности равносильно стремлению к бесконечности каждого из индексов m и k. Действительно, если бы при $n \to \infty$ номера $m = m(n)$ (соответсвенно $k = k(n)$) не стремились к бесконечности, то это означало бы, что в ряде (30.59) имеется лишь конеченое число неотрицательных (соответственно отрицательных) членов, а в этом случае ряд (30.59) абсолютно сходился бы, что противоречило бы его условной сходимости. То, при $k \to \infty$ (соответственно при $m \to \infty$) иметт место $n \to \infty$, очевидно в силу равенства $n = k + m$.

В силу сходимости ряда (30.59) последовательсноть s_n сходится. Если бы сходилась одна из последовательностей s_n^+ или s_m^- (т.е. сходился бы один из рядов (30.60) или (30.61)), то из равенства (30.62) следовало бы, что сходится и другая, а тогда в силу равенства (30.63) оказалось бы, что сходится последовательность s_n^*. Это же означается абсолютную сходимость ряда (30.59), что противоречит сделанному предположению. Поэтому ряды (30.60) и (30.61) расходятся.

Теорема (Риман) 1 *Если ряд с действительными членами условно сходится, то, каково бы ни было действительное число s, можно так переставать члены этого ряда, что сумма получившегося ряда будет равна s.*

Пусть члены ряда (30.59) - действиельные числа, и пусть произвольно задано число s. Рассмотрим ряды (30.60) и (30.61) Наберем из (30.60) подряд столько членов, чтобы их сумма превышала s и чтобы сумма меньшего числа этих членов была не больше s. Точнее, обозначим через n_1 наименьшее натуральное число, при котором выполняется условие

$$u_1^+ + \cdots + u_{n_1}^+ > s. \tag{30.64}$$

Тогда при n_1 имеет место неравенство

$$u_1^+ + \cdots + u_{n_1-1}^+ \leq s. \tag{30.65}$$

Возможность выбора такого числа n_1 следует из расходимости ряда (30.60)

Наберем из (30.61) подряд столько членов, чтобы, вычтя их сумму из суммы уже набранных ряда (30.60) членов, получить значение, меньшее s, и чтобы меньшее числа указанных членов ряда (30.61) не обладало этим свойством. Точнее, обозначим через n_2 такое наименьшее натуральное числа n_2, что

$$u_1^+ + \cdots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \cdots - u_{n_2}^- < s, \tag{30.66}$$

и если $n2 > 1$, то

$$u_1^+ + \dots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \dots - u_{n_2}^- \geq s. \tag{30.67}$$

Существование такого числа n_2 следует из расходимости ряда (30.61).

Далее обозначим через n_3 такое наименьшее натуральное числа, что

$$u_1^+ + \dots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \dots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \dots + u_{n_3}^+ > s,$$

и если $n_3 > n_1 + 1$, то

$$u_1^+ + \dots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \dots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \dots + u_{n_3-1}^+ \leq s.$$

Очевидно, всегда $n_3 > n_1$. Продолжая этот процесс, т.е. набирая соответствующие суммы членов поочередно то из ряда (30.60), то из ряда (30.61), получим ряд

$$u_1^+ + \dots + u_{n_1}^+ - u_1^- - \dots - u_{n_2}^- + u_{n_1+1}^+ + \dots + u_{n_3}^+ - u_{n_2+1}^- - \dots - u_{n_4}^- + \cdots \tag{30.68}$$

Обозначим черех s_n, $n = 1,\ 2,\ \dots,$ частичные суммы этого ряда. В силу выбора номеров $n_1, n_2, n_3, n_4, \dots$ будем иметь

$$s_{n_1} > s, n_1 > 1, s_{n_1-1} \leq s,$$

$$s_{n_1+n_2} < s, n_2 > 1, s_{n_1+n_2-1} \geq s,$$

$$s_{n_2+n_3} > s, n_3 > n_1 + 1, s_{n_2+n_3-1} \leq s,$$

$$s_{n_3+n_4} < s, n_4 > n_2 + 1, s_{n_3+n_4-1} \geq s,$$

$$n_1 < n_3 < \dots < n_{2_k+1} < \cdots, n_2 < n_4 < \dots < n_{2(k+1)} < \cdots,$$

$$k = 0, 1, 2, \dots \tag{30.69}$$

Из этих неравенств следует, что частичная сумма видна $s_{n_m+n_{m+1}}$ отличается от числа s не более чем на абсолютную величину последнего ее члена, т.е. для всех $m = 1,\ 2,\ \dots$ имеют место неравества

$$|s_{n_m+n_{m+1}} - s| \leq u_n^{\pm} m + 1, \tag{30.70}$$

где $u_n^{\pm} m + 1$ является абсолютной величиной последнего слагаемого суммы $s_{n_m+n_{m+1}}$ (член $u_n^{\pm} m + 1$ может принадлежать как ряду (30.60), так и ряду (30.61), поэтому в качестве верхнего индекса написано pm).

По условию ряд (30.59) сходится, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Отсюда в силу неравенства 2.1 получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} s_{n_m+n_{m+1}} = s. \tag{30.71}$$

Для любой же частичной суммы s_n ряда 2.1 в силу его построения существует такое m, что выполняет либо неравенство

$$s_{n_{m-1}+n_m} \leq s_n \leq s_{n_m+n_{m+1}},$$

либо

$$S_{n_m-1} + n_m \leq s_n \leq s_{n_m} + n_{m+1}.$$

Поэтому из равенства 2.1 следует, что и последовательность всех частичных сумм s_n ряда 2.1 имеет своим пределом число s

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

т.е число s является суммой ряда 2.1 .

Теорема Римана показывает, что одно из основных свойств конечных сумм чисел - независимость их суммы от порядка слагаемых (куоммутативность сложения) - не переносится на сходящиеся ряды, т.е. на бесконечные суммы: если ряд сходится, но не абсолютно, то его сумма зависит от порядка слагаемых.

Отметим, что и ассоциативный закон сложения непосредственно не перенотся на ряды; так, например ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^(n + 1) + \cdots$$

расходится, а ряды

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots, 1 - (1-1) - (1-1) - \cdots - (1-1) - \cdots ,$$

полученные из него указанным объединением его членов, сходятся; при этом сумма первого ряда равна 0, а второго 1.

“Призанки сходимости рядов Дирихле и Абеля” Рассмотрим одно преобразование конечных сумм вида $\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot b_j$, принадлежащее Абелю часто весьма полезное при иследовании сходимости рядов.

Пусть $o_j \in C, b_j \in C, B_j = b_1 + \ldots + b_j, j = 1, 2, \ldots, n$, и, следовательно, $b_1 = B_1, b_j = B_j - B_j - 1, j = 2, 3, \ldots, n$. Тогда $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n = a_1 \cdot B_1 + a_2 \cdot (B_2 - B_1) + \ldots + a_n \cdot (B_n - B_{n-1}) = (a_1 - a_2) \cdot B_1 + (a_2 - a_3) \cdot B_2 + \ldots + (a_{n-1} - a_n) \cdot B_{n-1} + a_n \cdot B_n$, или используя знак суммирования,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot b_j = \sum_{j-1}^{n-1} (a_j - a_{j-1}) \cdot B_j + a_n \cdot B_n.$$

Это равенство называется суммы $\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot b_j$. Если его переписать в виде

$$\sum_{j=2}^{n} a_j \cdot (B_j - B_{j-1}) = a_n \cdot B_n - a_1 \cdot B_1 - \sum_{j=1}^{n-1} (a_{j+1} - a_j) \cdot B_j,$$

2.2 Задание 3

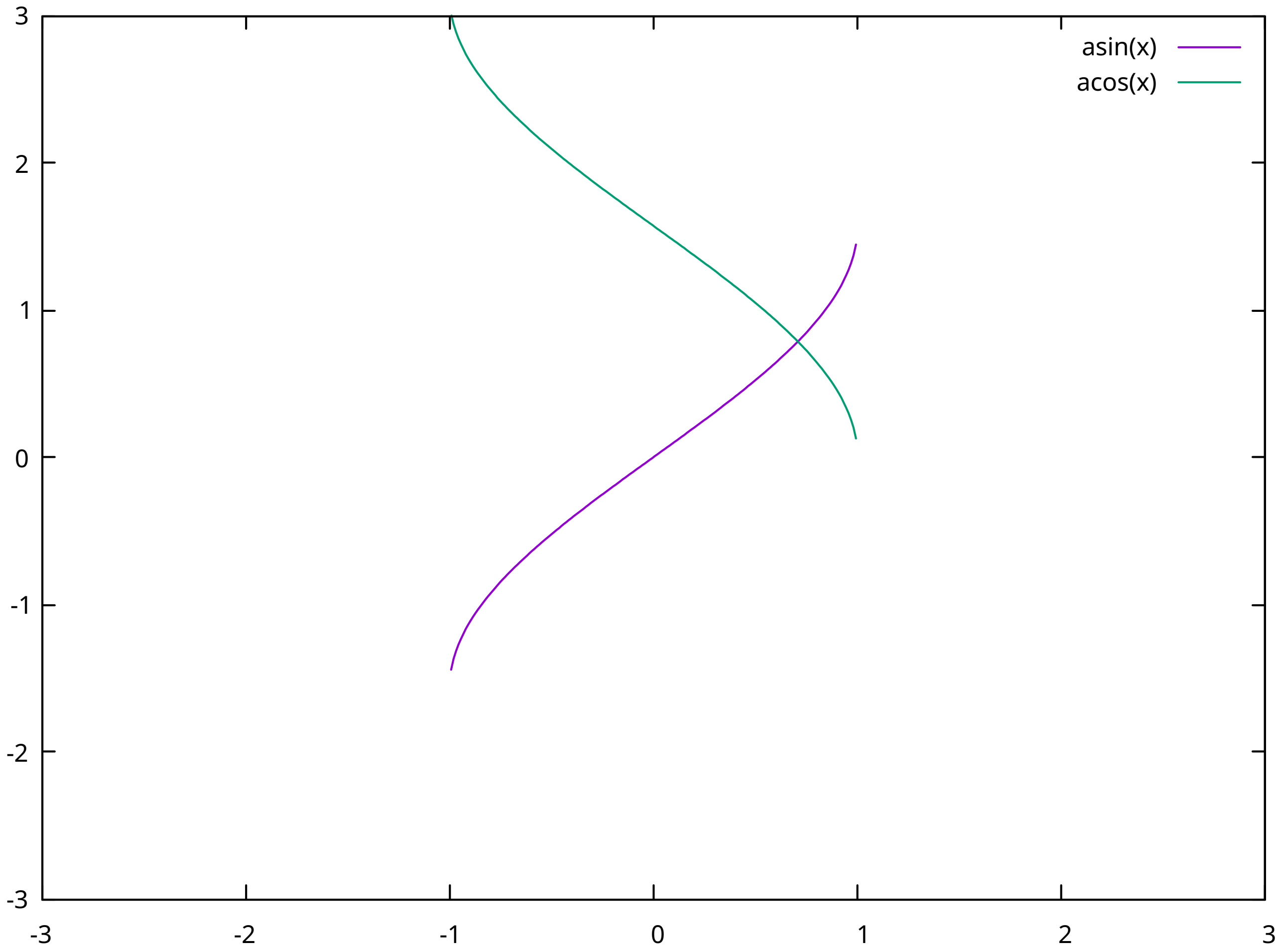

Рис. 1: asin(x), acos(x)