Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Ушаков А. Д. группа 22103

____
подпись

Руководитель практики:
преподаватель И. В. Сосновский

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2023

Содержание

1 Описание работы

Задание 1

От нас требуется ознакомиться с файлом из LaTeX. Затем надо добавить оригинальный абзац текста и дополнительно включить пару специальных символов.Потом транслировать исходный файл.

Для начала вводим текст после начала документа. Чтобы начать новый абзац надо 2 раза нажать Enter, чтобы образовалась пустая линия в LaTeX документе

Чтобы добавить специальный символ используем символ из таблицы символов, затем чтобы поместить в текст, помещаем его в конструкцию вида $ $ или в \[\].

Задание 2

От нас требуется подготовить свой LaTeX документ, в которой нам нужно переписать часть математического текста из представленных томов.

Чтобы ввести математическую формулу мы можем использовать следующие конструкции:
1. $ $ в случае если формула у нас в тексте
2.$$ $$ в случае когда формула находится не в тексте
3. \[\] более универсальная
Для того чтобы добавить номер формулы сбоку используем \tag { номер формулы }

Задание 3

От нас требуется нарисовать график в gnuplot, затем получившийся график положить в LaTeX документ из предыдущего задания

Чтобы нарисовать и положить график в документ надо:
1. Зайти в gnuplot и выставить терминал в режим pdfcairo

```
set terminal pdfcairo
```

2. Затем выставляем выходной файл куда будет выводиться график

```
set output "plot.pdf"
```

3. Рисуем график функции

```
plot sin(x)
```

4. Выходим из gnuplot

```
exit
```

Чтобы добавить наш график надо подключить пакет graphicx и добавить в любую часть документа команду:

```
\includegraphics{путь к файлу}
```

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле

Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле

26.1 Формула замены переменной. Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке Δ_x, а функция φ(t) - на промежутке Δ_t и $\varphi(\Delta_t) \subset \Delta_x$. Тогда имеет смысл композиция $f \circ \varphi$, т.е. сложная функция $f(\varphi$(x)).

Теорема 1. *Если функция f(x) непрерывна на промежутке Δ_t, а функция φ(t) непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(x)$ на промежутке Δ_t, то*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{26.1}$$

где $\alpha \in \Delta_t, \beta \in \Delta_t, a = \varphi(\alpha), b = \varphi'(\beta)$

Формула (26.1) называется *формулой замены переменной в определенном интеграле.*

$\triangleright$ Пусть *F(x)* - какая либо первообразная для функции *f(x)* на промежутке Δ_x; тогда функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на промежутке Δ_t, ибо

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

Поэтому по теореме Ньютона-Лейбница

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx\triangleleft$$

26.2 Формула интегрирования по частям.

Теорема 2. *Если функции u(x) и v(x) непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a, b]$, то*

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu \tag{26.2}$$

1

Формула (26.2) называется *формулой интегрирования по частям* для определённого интеграла. ▷ Имеем

$$\int_a^b (uv)'dx = \int_a^b (uv' + u'v)dx = \int_a^b udv + \int_a^b vdu \tag{26.3}$$

Все интегралы в (26.3) существуют, поскольку подынтегральные функции непрерывны. Для интеграла в левой части равенства, согласно формуле Ньютона-Лейбница, имеем

$$\int_a^b (uv)'dx = uv\Big|_a^b \tag{26.4}$$

что равносильно (26.2).◁

Замечание. Можно доказать, что формула интегрирования по частям (26.2) остается верной и в том случае, когда функции u и v непрерывны, а их производные кусочно непрерывны (см. п. 24.1).

Примеры. 1.Применим формулу интегрирования по частям для вычисления интеграла $\int_1^2 \ln x dx$:

$$\int_1^2 \ln x dx = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - 1.$$

2.Приведем пример интеграла, при вычислении которого применим и замену переменной, и интегрирование по частям. Вычислим интеграл $I = \int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}dx$.

Сделав сначала замену переменной $t = \cos x$, а затем проинтегрировав по частям, получим

$$I = \int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x} = \int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2}dt = \int_{-1}^1 \frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} + \int_{-1}^1 t\frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln t + \sqrt{1+t^2}\Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 td\sqrt{1+t^2} =$$

$$= \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + t\sqrt{1+t^2}\Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2}dt = 2\ln 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - I.$$

Из получившегося относительно I уравнения находим

$$I = \ln 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

Заметим, рассмотренный интеграл можно вычислить, и применяя только замену переменной. Для этого можно воспользоваться, например, уже вычисленным неопределенным интегралом $\int \sqrt{1+x^2}dx$ (пример в п. 19.4).

3*. Покажем, что для любого n=1,2,...

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} \text{ при } n \text{ четном,} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \text{ при } n \text{ нечетном.} \end{cases} \tag{26.4}$$

Под $n!!, n \in N$, понимается произведение всех натуральных чисел, не превышающих n и имеющих ту же четность, что и число n:

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 ... \cdot (2n-2) \cdot 2n,$$

$$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 ... \cdot (2n-1) \cdot (2n+1).$$

По определению 0!!=1

Положив для удобства $I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \dfrac{\pi}{2}$ и проинтегрировав по частям интеграл I_n при $n \geqslant$2,имеем

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x d(-\cos x) =$$

$$= -sin^{n-1} x \cos x|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x cos^2 x dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

откуда

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_n - 2. \tag{26.5}$$

Заметим, что

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1. \tag{26.6}$$

Поэтому при $n = 2k+1$, т.е при нечетном n,

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = ... = \frac{2k(2k-2)...2}{(2k+1)(2k-1)...1} I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \tag{26.7}$$

а при $n = 2k$, т.е. при четном n,

$$I_2k = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = ... = \frac{(2k-1)(2k-3)...1}{2k(2k-2)...2} I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2} \qquad (26.8)$$

Равенство интегралов $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ и $\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ сразу получается с помощью замены переменных $x = \frac{\pi}{2} - t, 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Таким образом, формулы (26.4) доказаны. Из них легко получается формула Валлиса*)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} (\frac{(2n)!!)}{(2n-1)!!})^2. \qquad (26.9)$$

В самом деле, проинтегрировав по отрезку $[0, \pi/2]$ неравенства

$$\sin^{2n+1} x \leqslant \sin^{2n} x \leqslant \sin^{2n-1} x, n = 1, 2...$$

получим

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \leqslant \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \leqslant \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x,$$

т.е.

$$I_{2n+1} \leqslant I_{2n} \leqslant I_{2n-1} \qquad (26.10)$$

Отсюда в силу формул (26.4) имеем

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \qquad (26.11)$$

Если ввести обозначения

$$x_n = \frac{1}{2n+1}(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2, y_n = \frac{1}{2n}(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2, \qquad (26.12)$$

то неравенства(26.11) можно записать в виде

$$x_n \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant y_n \qquad (26.13)$$

где

$$y_n - x_n = \frac{1}{2n}\frac{1}{2n+1}(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2 = \frac{1}{2n} x_n \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2n} \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

и, следовательно, $\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$, т.е. длины отрезков $[x_n, y_n]$, содержащих точку $\pi/2$, стремятся к нуля, а это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{\pi}{2}$$

Равенство $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{\pi}{2}$ в силу первой формулы (26.12) и представляет собой формулу Валлиса.

2.2 Задание 3

Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле

Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле

26.1 Формула замены переменной. Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке Δ_x, а функция φ(t) - на промежутке Δ_t и $\varphi(\Delta_t) \subset \Delta_x$. Тогда имеет смысл композиция $f \circ \varphi$, т.е. сложная функция $f(\varphi(\text{x}))$.

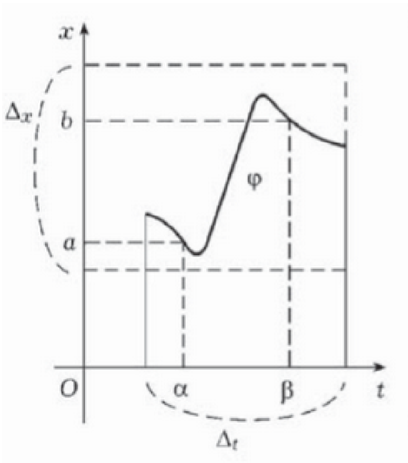

Рис.104

Теорема 1. *Если функция f(x) непрерывна на промежутке Δ_t, а функция $\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(x)$ на промежутке Δ_t, то*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (26.1)$$

где $\alpha \in \Delta_t, \beta \in \Delta_t, a = \varphi(\alpha), b = \varphi'(\beta)$ (Рис.104).

Формула (26.1) называется *формулой замены переменной в определенном интеграле.*

$\triangleright$ Пусть *F(x)* - какая либо первообразная для функции *f(x)* на промежутке Δ_x; тогда функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на промежутке Δ_t, ибо

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

Поэтому по теореме Ньютона-Лейбница

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx \triangleleft$$

26.2 Формула интегрирования по частям.

Теорема 2. *Если функции u(x) и v(x) непрерывны вместе со своими производными на отрезке* $[a,b]$, *то*

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du \qquad (26.2)$$

Формула (26.2) называется *формулой интегрирования по частям* для определённого интеграла. ▷ Имеем

$$\int_a^b (uv)' dx = \int_a^b (uv' + u'v) dx = \int_a^b u dv + \int_a^b v du \qquad (26.3)$$

Все интегралы в (26.3) существуют, поскольку подынтегральные функции непрерывны. Для интеграла в левой части равенства, согласно формуле Ньютона-Лейбница, имеем

$$\int_a^b (uv)' dx = uv\Big|_a^b \qquad (26.4)$$

что равносильно (26.2).◁

Замечание. Можно доказать, что формула интегрирования по частям (26.2) остается верной и в том случае, когда функции u и v непрерывны, а их производные кусочно непрерывны (см. п. 24.1).

Примеры. 1.Применим формулу интегрирования по частям для вычисления интеграла $\int_1^2 \ln x dx$:

$$\int_1^2 \ln x dx = x \ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - 1.$$

2.Приведем пример интеграла, при вычислении которого применим и замену переменной, и интегрирование по частям. Вычислим интеграл $I = \int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x} dx$.

Сделав сначала замену переменной $t = \cos x$, а затем проинтегрировав по частям, получим

$$I = \int_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x} = \int_{-1}^1 \sqrt{1+t^2} dt = \int_{-1}^1 \frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}} dt$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} + \int_{-1}^1 t\frac{tdt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln t + \sqrt{1+t^2}\Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 td\sqrt{1+t^2} =$$

$$= \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + t\sqrt{1+t^2}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\sqrt{1+t^2}dt = 2\ln 1+\sqrt{2}+2\sqrt{2}-I.$$

Из получившегося относительно I уравнения находим

$$I = \ln 1+\sqrt{2}+\sqrt{2}$$

Заметим, рассмотренный интеграл можно вычислить, и применяя только замену переменной. Для этого можно воспользоваться, например, уже вычисленным неопределенным интегралом $\int\sqrt{1+x^2}dx$ (пример в п. 19.4).

3*. Покажем, что для любого n=1,2,...

$$I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n xdx = \int_0^{\pi/2}\cos^n xdx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & \text{при } n \text{ четном,} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases} \tag{26.4}$$

Под $n!!$,$n \in N$, понимается произведение всех натуральных чисел, не превышающих n и имеющих ту же четность, что и число n:

$$(2n)!! = 2\cdot 4...\cdot(2n-2)\cdot 2n,$$

$$(2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5...\cdot(2n-1)\cdot(2n+1).$$

По определению 0!!=1

Положив для удобства $I_0 = \int_0^{\pi/2}dx = \frac{\pi}{2}$ и проинтегрировав по частям интеграл I_n при $n \geqslant$2,имеем

$$I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n xdx = \int_0^{\pi/2}\sin^n xd(-\cos x) =$$

$$= -sin^{n-1}x\cos x|_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}xcos^2xdx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx = (n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n,$$

откуда

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_n - 2. \tag{26.5}$$

Заметим, что

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, I_1 = \int_0^{\pi/2}\sin xdx = 1. \tag{26.6}$$

Поэтому при $n = 2k+1$, т.е при нечетном n,

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = ... = \frac{2k(2k-2)...2}{(2k+1)(2k-1)...1} I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \tag{26.7}$$

а при $n = 2k$, т.е. при четном n,

$$I_2 k = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = ... = \frac{(2k-1)(2k-3)...1}{2k(2k-2)...2} I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2} \tag{26.8}$$

Равенство интегралов $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ и $\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ сразу получается с помощью замены переменных $x = \frac{\pi}{2} - t, 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Таким образом, формулы (26.4) доказаны. Из них легко получается формула Валлиса*)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n+1} (\frac{(2n)!!)}{(2n-1)!!})^2. \tag{26.9}$$

В самом деле, проинтегрировав по отрезку $[0, \pi/2]$ неравенства

$$\sin^{2n+1} x \leqslant \sin^{2n} x \leqslant \sin^{2n-1} x, n = 1, 2...$$

получим

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \leqslant \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \leqslant \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x,$$

т.е.

$$I_{2n+1} \leqslant I_{2n} \leqslant I_{2n-1} \tag{26.10}$$

Отсюда в силу формул (26.4) имеем

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leqslant \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \tag{26.11}$$

Если ввести обозначения

$$x_n = \frac{1}{2n+1} (\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2, y_n = \frac{1}{2n} (\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2, \tag{26.12}$$

то неравенства(26.11) можно записать в виде

$$x_n \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant y_n \tag{26.13}$$

где

$$y_n - x_n = \frac{1}{2n} \frac{1}{2n+1} (\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!})^2 = \frac{1}{2n} x_n \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2n} \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$, т.е. длины отрезков $[x_n, y_n]$, содержащих точку $\pi/2$, стремятся к нуля, а это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{\pi}{2}$$

Равенство $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{\pi}{2}$ в силу первой формулы (26.12) и представляет собой формулу Валлиса.

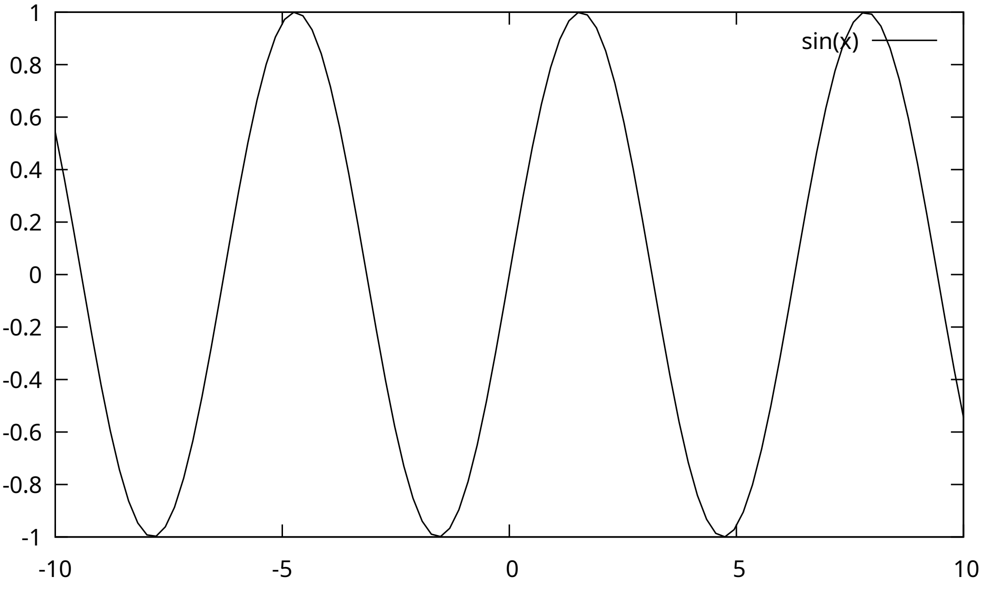

График для 3 задания