Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнила:
Титова А. В. группа 22103

____

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____

подпись

Итоговая оценка:

____

оценка

Петрозаводск – 2022

Содержание

1 Описание работы

Я успешно завершила два задания. Во второй задаче, я создала документ с математическим текстом, который предоставил мне мой руководитель, используя LaTeX. Также я добавила разделы, автоматическую нумерацию формул и создала новые окружения для примеров, определений и других математических объектов. В третьей задаче я построила выбранный мною график, используя интерпретатор команд gnuplot. Далее, я добавила это изображение в документ, который был создан ранее во второй задаче. В процессе выполнения заданий я использовала учебники из предложенной литературы и изучала скринкасты. Мои результаты представлены ниже.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Теорема 1. *Если ряд сходится, то он суммируется методом средних арифметических к своей сумме.*

$\triangleright$ Сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ означает, что последовательность его час-

тичных сумм $\{s_n\}$ имеет конечный предел, а тогда, согласно лемме 4 , и последовательность средних арифметических $\{\sigma_n\}$ членов последовательности $\{s_n\}$ имеет тот же предел

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} s_n \quad \triangleleft$$

§ 31. Функциональные последовательности и ряды

31.1. Сходимость функциональных последовательностей и рядов.

Пусть на некотором множестве X (произвольной природы) задана последовательность функций

$$f_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

принимающих числовые значения (вообще говоря, комплексные, в частности, только действительнье). Элементы множества X будем называть точками.

Последовательность (1) называется ограниченной на множестве X, если существует такое число $c > 0$, что для всех $n = 1, 2, \ldots$ и всех точек $x \in X$ выполняется неравенство

$$|f_n(x)| \leqslant c$$

Последовательность (1) называется сходящейся на множестве X, если при любом фиксированном $x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится.

Если последовательность (1) сходится на множестве X, то функция f, определенная при каждом $x \in X$ равенством

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

называется пределом последовательности (1).

Пусть на множестве X задана последовательность числовых функций $u_n(x), n = 1, 2, \ldots$ Множество всех числовых рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, в каждом из которых точка $x \in X$ произвольно фиксирована, называется рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{2}$$

на множестве X, а функции $u_n(x), n = 1, 2, \ldots, -$ его членами. Аналогично случаю числовых рядов сумма

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad x \in X,$$

называется частичной суммой ряда (2) n-го порядка, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ - его $n-\mu$ остатком.

Ряд (2) называется сходящимся на множестве X, если последовательность $\{s_n(x)\}$ его частичных сумм сходится на этом множестве. При этом предел частичных сумм

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x), \quad x \in X$$

называется суммой ряда (2). В этом случае пишут

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

и говорят, что функция $s(x)$ раскладывается в ряд (2).

Если ряд (2) при любом фиксированном $x \in X$ сходится абсолютно, то он называется абсолютно сходящимся на множестве X.

Примеры 1. Рассмотрим ряд, членами которого являются функции

$$u_n(z) = \frac{z^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

определенные на комплексной плоскости C, т. е. ряд

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, \quad z \in C. \tag{3}$$

Исследуем абсолютную сходимость этого ряда при фиксированном z с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0.$$

Таким образом, при любом $z \in C$ ряд (3) абсолютно, а следовательно, и просто сходится; иначе говоря, ряд (3) сходится, и притом абсолютно, на всей комплексной плоскости.

2. Рассмотрим ряд

$$\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \ldots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \ldots, \quad x \in R. \tag{4}$$

При $x = 0$ все его член̆ь обращаются в нуль и, следовательно, его сумма $s(x)$ также равна нулю:

$$s(0) = 0.$$

При $x \neq 0$ ряд (4) представляет собой сумму членов бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем

$$q = \frac{1}{1+x^2}, \quad 0 < q < 1 \tag{5}$$

и поэтому

$$s(x) = \frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1. \tag{6}$$

Из формул (5) и (6) следует, что ряд (4) сходится на всей числовой оси и его сумма

$$s(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \text{при} & x \neq 0 \\ 0 & \text{при} & x = 0 \end{array} \right\} = |\operatorname{sign} x|$$

оказывается разрывной в точке $x = 0$ функцией (см. рис. 60), хотя все его члены, очевидно, непрерывны на всей числовой оси.

Этот пример показывает, что сумма сходящегося и даже абсолютно сходящегося на некотором множестве ряда (члены ряда (4) неотрицательны, и потому ясно, что он абсолютно сходится), все члены которого непрерывны, может оказаться разрывной функцией. Таким образом, на сходящиеся и даже на абсолютно сходящиеся ряды функций не переносится свойство конечных сумм: сумма конечной совокупности непрерывных на некотором множестве функций также непрерывна на нем. Для того чтобы описать ряды функций, на которые переносится это свойство, введем понятие равномерно сходящихся рядов.

31.2. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов.

Определение 1. *Функциональная последовательность* (1) *называется равномерно сходящейся к функции* f *на множестве* X*, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такой номер* n_0*, что для всех точек* $x \in X$ *и всех номеров* $n > n_0$ *выполняется неравенство*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{7}$$

Очевидно, что если последовательность (1) равномерно сходится на множестве X к функции f, то эта последовательность сходится к функции f на рассматриваемом множестве (определение сходимости последовательности функций на множестве см. в п. 31.1).

Если последовательность $\{f_n\}$ сходится на множестве X к функции f, то пишут

$$f_n \underset{X}{\to} f$$

а если эта последовательность сходится равномерно к f на указанном множестве, то пишут

$$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$$

В символической записи определения сходящейся и равномерно сходящейся на множестве последовательности выглядят соответст-

2.2 Задание 3

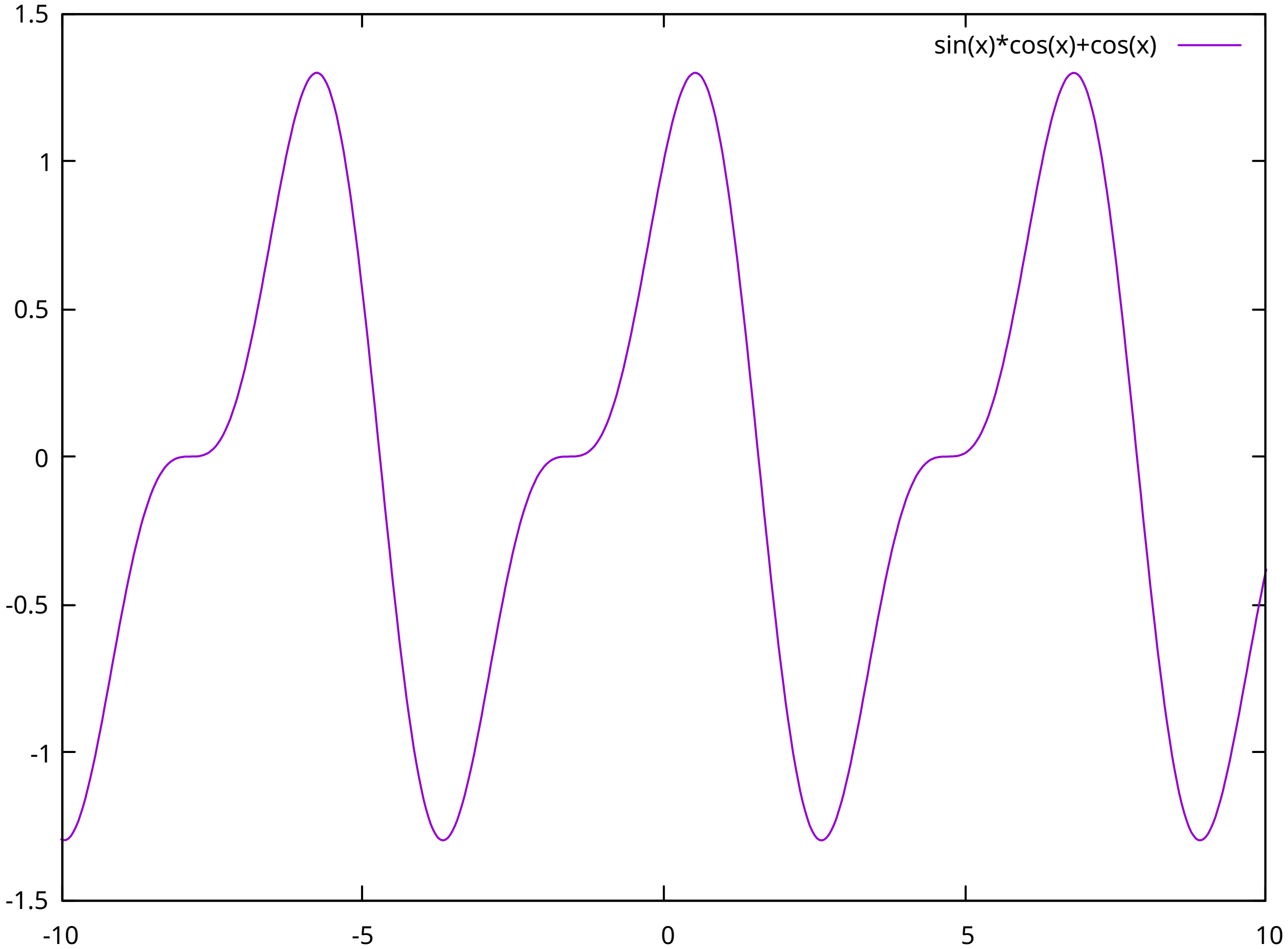

Рис. 1: График функции