Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Скребцов М. А. группа #22104

____
подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2023

Содержание

1 Описание работы

На первом курсе второго семестра я впервые познакомился с такой программой как LaTex, которая помогает в написании сложных математических формул. На первом занятии я узнал о том, как правильно сделать конвертацию файла .tex в .pdf и .dvi, а так же ознакомился со спецсимволами. Во второй работе я научился правильно набирать математические формулы, выводить их в центр страницы используя спецсимволы и т.д. В третьей работе я поработал с новой программой, а именно с gnuplot, с помощью неё я смог построить график sin(x) + cos(x). Помимо построения графика, его нужно было добавить на отдельный лист к прошлой работе, что я успешно и сделал. Чтобы разобраться в том как и что делать, мне помогали скринкасты своего преподователя - О. Ю. Богоявленской, а так же литературные исчтоники, такие как Котельников, И. А. "LaTeX по-русски". Для закрепления всех полученных знаний,мне предстоило написать 8 конспекто на такие темы,как - набор и трансляция LaTex, набор математических формул, специальные знаки и т.д. В конце семестра мне предстояло сделать отчет по всем выполненным работам, именно в нем вы сейчас читаете данное описание.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

и X - какое-либо измеримое в первой системе координат множество, тогда оно ограничено. Поэтому множество $s_k = s_k(X)$ всех кубов ранга k, содержащихся в нем, и множество $S_k = S_k(X)$ всех кубов того же ранга, пересекающихся с ним, состоят из конечного множества кубов этого ранга. Пусть, например,

$$s_k = \bigcup_{i=1}^{i_0} Q_i$$

Q_i - куб ранга $.k.$) Множество s_k, будучи конечной суммой измеримых в обеих координатных системах множеств Q_i, также измеримо в Этих системах, причем множества $Q_i, i = 1, 2, \ldots, i_0$, образуют его разбиение, поэтому (см. лемму 6 в п. 42.3)

$$\widetilde{\mu} s_k = \sum_{i=1}^{i_0} \tilde{\mu} Q_i \underset{(43.29)}{=} \lambda \sum_{i=1}^{i_0} \mu Q_i = \lambda \mu s_k. \tag{1}$$

Если $\sigma_k = \sigma_k(X)-$ множество кубов ранга k, входящих в множество S_k, но не входящих в множество s_k, то σ_k отличается от множества $S_k \backslash s_k$ на множество мерь нуль (см. замечание 7 в п. 42.1) в обеих координатных системах. Следовательно, $\widetilde{\mu}\left(S_k \backslash s_k\right) = \tilde{\mu} \sigma_k, \mu\left(S_k \backslash s_k\right) = = \mu \sigma_k$. Множество σ_k состоит из конечного множества кубов ранга k, поэтому аналогично (8 имеем

$$\widetilde{\mu}\left(S_k \backslash s_k\right) = \tilde{\mu} \sigma_k = \lambda \mu \sigma_k = \lambda \mu\left(S_k \backslash s_k\right) \tag{2}$$

Поскольку $s_k \subset X \subset S_k$ и, в силу измеримости множества X в первой системе координат,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu\left(S_k \backslash s_k\right) = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\mu}\left(S_k \backslash s_k\right) \underset{(43.31)}{=} \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} \mu\left(S_k \backslash s_k\right) = 0$$

Поэтому, согласно лемме 7 п. 43.3, множество X измеримо во второй системе координат и

$$\widetilde{\mu} X = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\mu} s_k = \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} \mu s_k = \lambda \mu X \tag{3}$$

Докажем, что $\lambda = 1$. Для этого заметим, что объем n-мерного шара V_r^n радиуса r равен $\kappa_n r^n$ (см. П. (8)), где κ_n - определенное число. Величина длинь радиуса шара, как и длина всякого отрезка, имеет одно и то же значение при любом выборе системы координат. Таким образом, объем n-мерного шара V_r^n не зависит от выбора системы координат

$$\tilde{\mu} V_r^n = \mu V_r^n \tag{4}$$

Для многогранника $s_k\left(V_r^n\right)$ (см. формулу (42.9)), состоящего из кубов ранга k (следовательно, с ребрами, параллельными координатным осям первой координатной системы), будем иметь

$$\widetilde{\mu} s_k\left(V_r^n\right) \underset{(43.29)}{=} \lambda \mu s_k\left(V_r^n\right).$$

Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \widetilde{\mu} s_k\left(V_r^n\right)=\lambda \lim_{k \rightarrow \infty} \mu s_k\left(V_r^n\right)=\lambda \mu V_r^n$$

но

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \widetilde{\mu} s_k\left(V_r^n\right) \underset{(43.32)}{=} \widetilde{\mu} V_r^n \underset{(43.33)}{=} \mu V_r^n$$

т.е.

$$\lambda \mu V_r^n=\mu V_r^n$$

Это означает, что $\lambda=1$.

Итак, действительно мера множества не зависит от выбора системы координат. Поскольку переход от одного ортонормированного базиса к другому осуществляется с помощью ортогональных матриц, то мера является инвариантом при линейных отображениях, задаваемых формулами

$$y_i=\sum_{j=1}^n c_{i j} x_j, \quad i=1,2, \ldots, n$$

с ортогональными матрицами $C=\left(c_{i j}\right), i, j=1,2, \ldots, n$ (см. п. 33.1).

Напомним, что раньше (в п. 42.1) было показано, что мера множества не зависит и от параллельного переноса.

43.5*. Формулы Ньютона-Лейбница и Тейлора. Приведем самый простой вывод формулы Тейлора: она может быть получена последовательным применением формулы Ньютона-Лейбница к получающимся подынтегральным функциям. Остаточный член формулы Тейлора получается в этом случае в виде повторного интеграла, который с помощью формулы перемены порядка интегрирования (см. формулу (43.22)) можно привести к уже известному нам его виду в интегральной форме с однократным интегрированием (см. теорему 6 в п. 32.3).

Теорема 2. Если функция f имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную порядка и $x_0 \in[a, b]$, то для любого $x \in[a, b]$ имеет место равенство

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}\left(x_0\right)}{k!}\left(x-x_0\right)^k+\int_{x_0}^x d t_1 \int_{x_0}^{t_1} d t_2 \cdots \int_{x_0}^{t_{n-1}} f^{(n)}\left(t_n\right) d t_n \tag{5}$$

(формула Тейлора с остаточным членом в форме повторного интеграла). $\triangleright$ Докажем формулу (5) по индукции. При $n=1$ она является формулой Ньютона-Лейбница

$$f(x)=f\left(x_0\right)+\int_{x_0}^x f^{\prime}\left(t_1\right) d t_1$$

Если при некотором $n = 1, 2, \ldots, n-1$ имеет место формула

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} dt_1 \int_{x_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{x_0}^{t_{m-1}} f^{(m)}(t_m)\, dt_m \tag{6}$$

то, применив формулу Ньютона-Лейбница к функции $f^{(m)}(t_m)$, т. е.

$$f^{(m)}(t_m) = f^{(m)}(x_0) + \int_{x_0}^{t_m} f^{(m+1)}(t_{m+1})\, dt_{m+1}$$

подставив получившееся выражение в интегральный член равенства (6) и проинтегрировав первое слагаемое, получим

$$\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x} dt_1 \int_{x_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{x_0}^{t_{m-1}} \left(f^{(m)}(x_0) + \int_{x_0}^{t_m} f^{(m+1)}(t_{m+1})\, dt_{m+1} \right) dt_m = \\
&= f^{(m)}(x_0) \int_{x_0}^{x} dt_1 \int_{x_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{x_0}^{t_{m-1}} dt_m + \int_{x_0}^{x} dt_1 \int_{x_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{x_0}^{t_m} f^{(m+1)}(t_{m+1})\, dt_{m+1} = \\
&= \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + \int_{x_0}^{t_1} dt_1 \int_{x_0}^{t_{m-1}} dt_2 \ldots \int_{x_0}^{t_m} dt_m \int_{x_0}^{(m+1)} (t_{m+1})\, dt_{m+1}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Из равенств (6) и (7) следует, что
$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} dt_1 \int_{x_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{x_0}^{t_{m-1}} dt_m \int_{x_0}^{t_m} f^{(m+1)}(t_{m+1})\, dt_{m+1}$.
При $m = n-1$ эта формула превращается в формулу (5). $\triangleleft$ Покажем, что остаточный член

$$r_n(x) = \int_{x_0}^{x} dt_1 \int_{x_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{x_0}^{t_{n-1}} f^{(n)}(t_n)\, dt_n \tag{8}$$

в формуле Тейлора (5) может быть преобразован к уже известной его интегральной форме с одним интегрированием.

2.2 Задание 3

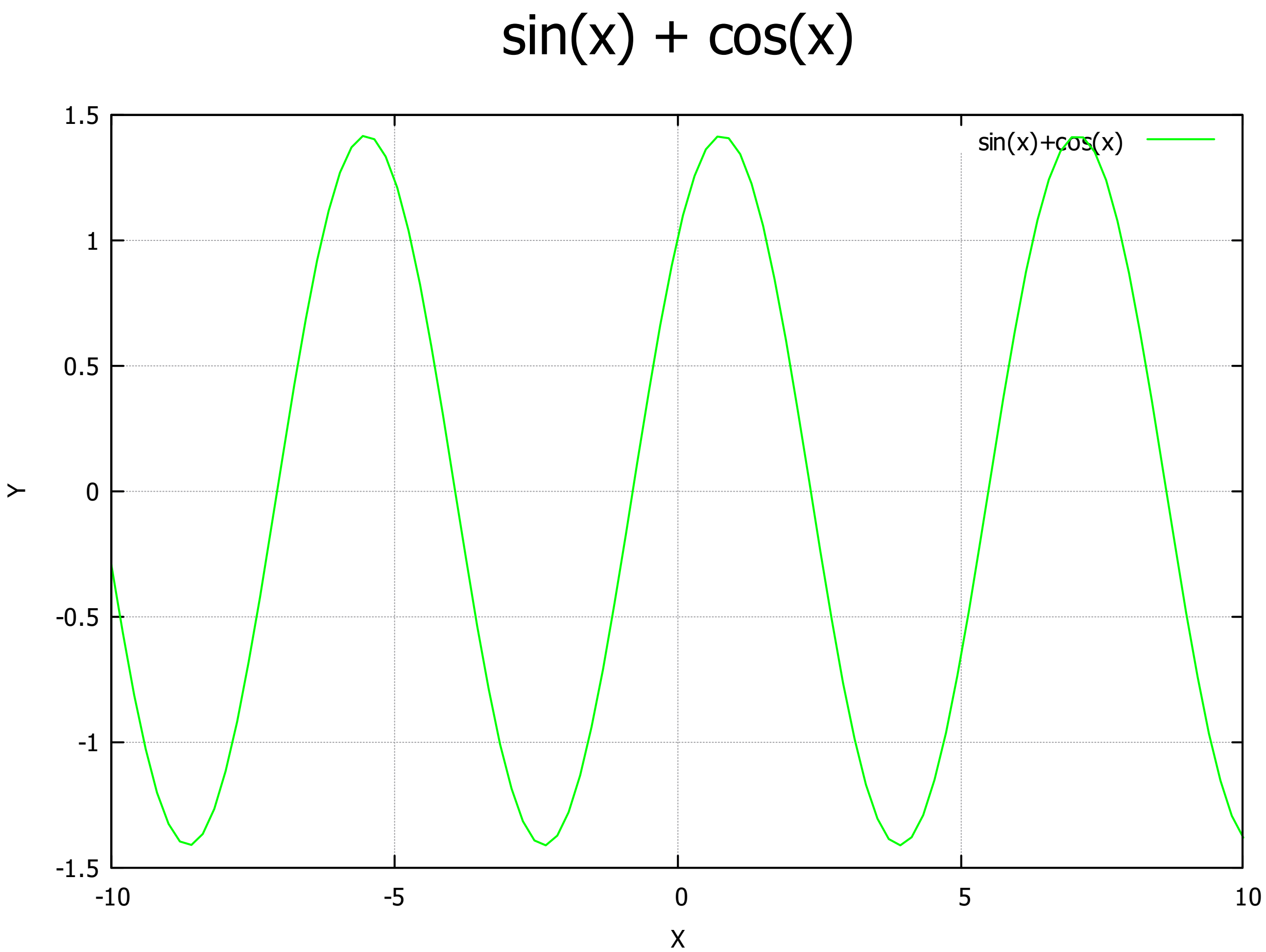

Рис. 1: sin(x)+cos(x)