Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Шарова О. В. группа #22103

____
подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2023

Содержание

1 Описание работы

С 06.02.2023 по 11.06.2023 я находилась на практике в рамках курса “Компьютерные технологии в математике” на кафедре информатики и математического обеспечения. В течение этого времени я освоила инструменты набора, трансляции математических текстов с помощью издательской системы LaTeXи построения научных графиков с помощью системы Gnuplot.

Для работы были представлены два основных практических задания.

Задачей задания №2 было подготовить документ, содержащий математический текст из учебника по Математическому Анализу Кудрявцева Л.Д. В процессе выполнения задания я использовала различные пакеты LaTeX, например *fancyhdr*, нужный для оформления страницы параграфа, а также определяла новые команды для более быстрого набора символов. Помимо вышесказанного нужно было в соответствии с правилами набрать математические формулы, оформить специлальные абзацы, новые окружения для теорем, лемм и т.п. и автоматическую нумерацию.

В задании №3 требовалось с помощью интерпритатора команд gnuplot построить график и разместить его в документе, который был подготовлен во время выполнения задания №2. График был переведен в PDF формат и вставлен в документ с помощью пакетов *graphicx,epsfig* и окружения *figure*.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Примеры. *1. Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{sin^2 n\alpha}{n^2}$ *сходится, ибо*

$$0 \leq \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad n = 1, 2 \ldots,$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ *сходится.*

2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$ *расходится, ибо*

$$\frac{1}{1+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *расходится.*

Теорема 1 (Признак Даламбера)**.** *Пусть для ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n > 0, \quad n = 1, 2 \ldots \tag{1}$$

существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}} = l \tag{2}$$

Тогда если $l < 1$, то ряд (1) сходится, а если $l > 1$,то расходится.

$\triangleright$ Пусть сначала $l < 1$. Выберем число q так, чтобы $l < q < 1$. Тогда в силу условия (2) существует такой номер $n_0 > 1$, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\frac{u_n}{u_{n-1}} < q$ и, следовательно, неравенство $u_n < qu_{n-1}$. Применяя это неравенство последовательно для, $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots$, получим

$$\begin{array}{l} u_{n_0+1} < qu_{n_0}, \\ u_{n_0+2} < qu_{n_0+1} < q^2 u_{n_0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n_0+k} < q^k u_{n_0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Но ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k u_{n_0} = u_{n_0} \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ в силу условия $0 < q < 1$ сходится, поэтому, согласно признаку сравнения, сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n_0+k}$, а следовательно, и ряд (1).

Пусть теперь $l > 1$; тогда в силу условия (2) существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\frac{u_n}{u_{n-1}} > 1$, а поэтому и неравенство $u_n > u_{n-1}$. Применяя его последовательно для $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots$, получим

$$u_{n+1} > u_n > \ldots > u_{n_0+1} > u_{n_0} > 0$$

Поэтому последовательность членов ряда (1) не стремится к нулю, откуда и следует его расходимость. $\triangleleft$

Теорема 2 (признак Коши). *Пусть для ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \geqslant 0 \tag{3}$$

существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l \tag{4}$$

Тогда если $l < 1$, то ряд (3) сходится, а если $l > 1$, то расходится.

$\triangleright$ Пусть сначала $l < 1$. Выберем число q так, чтобы $l < q < 1$. Тогда в силу условия (4) существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} < q$ и, следовательно, $u_n < q^n$.

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится, то сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$, а поэтому и ряд (3).

Если $l > 1$, то в силу условия (4) существует такой номер n_0, что при $n > n_0$ выполняется неравенство $\sqrt[n]{u_n} > 1$, т. е. $u_n > 1$, и, следовательно, последовательность членов ряда (3) не стремится к нулю, поэтому этот ряд расходится. $\triangleleft$

Примеры. *3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится. Это устанавливается, например, с помощью признака Даламбера:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n!}{1/(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

4.Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ сходится. Это сразу можно установить с помощью признака Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

5. Для ряда с общим членом $u_n = \frac{1}{n^\alpha}, \alpha > 0$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = (\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1})^\alpha = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = \frac{1}{(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^\alpha} = 1$$

(см. пример 4 в п. 13.2). Таким образом, при применении признаков Даламбера и Коши соответствующие пределы равны единице, т. е. при помощи этих признаков нельзя определить, сходятся или расходятся рассматриваемые ряды. Среди них есть как сходящиеся при $\alpha > 1$, так и расходящиеся при $\alpha \leqslant 1$. Иначе говоря, среди рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с неотрицательными членами, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, соответственно $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$, имеются как сходящиеся (например, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$), так и расходящиеся (например, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$) ряды.

1.Знакочередующиеся ряды.

Теорема 3 (Лейбниц)**.** *Если последовательность $\{u_n\}$ убывает и стремится к нулю, т. е.*

$$u_n \geqslant u_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0, \tag{5}$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \tag{6}$$

сходится, причем, если $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n, \quad s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} u_k$, то при любом $n = 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство

$$|s_n - s| \leqslant u_{n+1} \tag{7}$$

Прежде всего отметим, что из условия (5) следует, что

$$u_n \geqslant 0, \tag{8}$$

в силу чего члены ряда (6) поочередно то $\geqslant 0$, то $\leqslant 0$.

Ряды вида (6) при $u_n > 0$ называются *знакочередующимися.*

$\triangleright$ Частичные суммы с четными номерами ряда (6) возрастают и неотрицательны. В самом деле,

$$s_{2n+2} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2n+1} - u_{2n+2}) = \tag{9}$$
$$s_{2n} + (u_{2n+1} - u_{2n+2}) \geqslant s_{2n} \geqslant 0, \quad n = 2, 3, \ldots$$

ибо в силу убывания последовательности u_n значения всех выражений, стоящих в круглых скобках, неотрицательны. Кроме того, последовательность s_{2n} ограничена сверху:

$$s_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \ldots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} \leqslant u_1, \tag{10}$$

ибо

$$u_k - u_{k+1} \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad u_{2n} \underset{(8)}{\geqslant} 0$$

Поскольку последовательность s_{2n} возрастает и ограничена

2.2 Задание 3

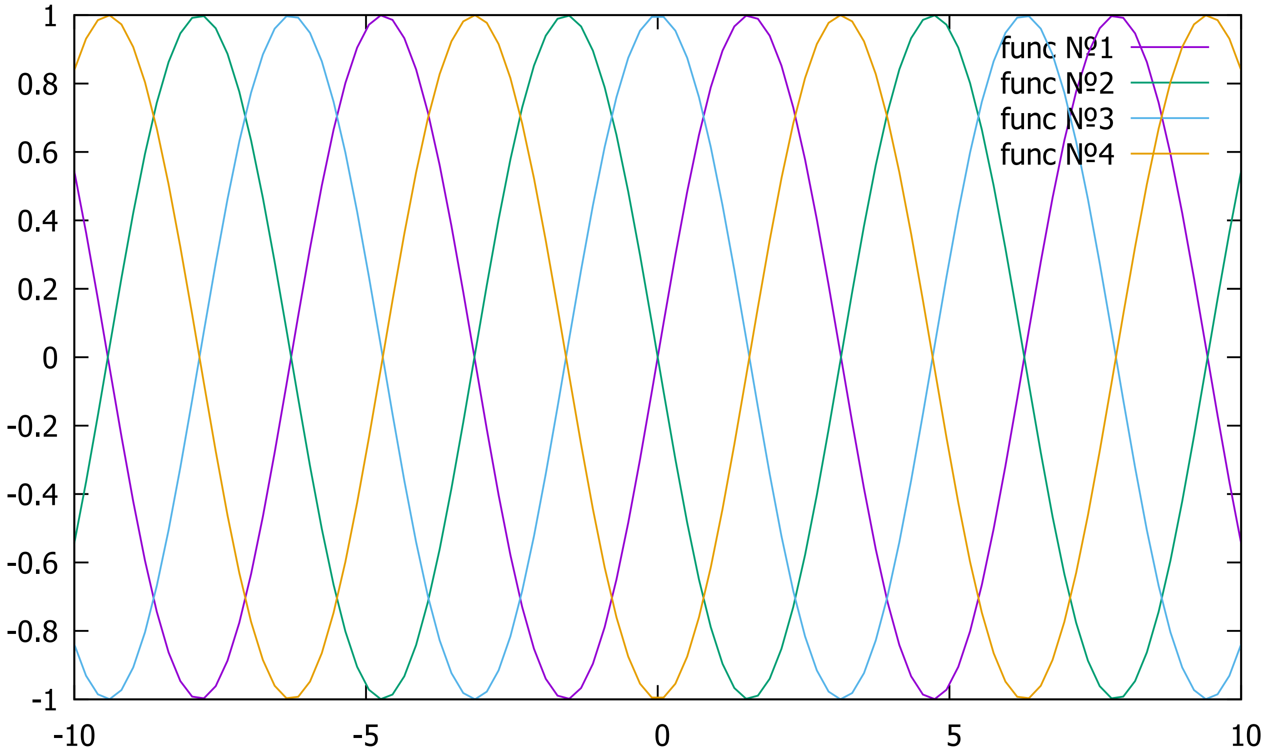

Рис. 1: График четырех тригонометрических функций