Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Севрюков Р. Ю. группа 22103

____

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____

подпись

Итоговая оценка:

____

оценка

Петрозаводск – 2022

Содержание

1 Описание работы

Мною были выполнены две задачи, которые я успешно завершил. В рамках второй задачи я создал документ с математическим текстом, предоставленным мной инструктором, используя LaTeX. Для того, чтобы улучшить качество документа, я добавил разделы и автоматическую нумерацию формул. Также, я создал новые окружения для примеров, определений и других математических объектов. В третьей задаче мною был построен график в декартовых координатах, используя интерпретатор команд gnuplot. Далее, я добавил плавающий объект в документ, который был создан в рамках второй задачи. В процессе работы я изучал скринкасты и использовал учебники из предложенной литературы. Результаты моей работы представлены ниже.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

П р и м е р ы. 1. Рассмотрим ряд с общим членом $u_n = \ln\cos\frac{1}{n}$. Используя разложение функций cos и 1п по формуле Тейлора (см. п. 14.2), получим

$$u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) =$$
$$= -\frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) + O\left(\left(-\frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)^2\right) =$$
$$= -\frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad n \to \infty.$$

Поскольку ряды $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{n^4}\right)$ сходятся, то сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\cos\frac{1}{n}$$

2. Рассмотрим ряд с общим членом $u_n = \ln\cos\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Имеем $u_n = \ln\cos\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \ln\left(1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$ $= -\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + O\left(\left(-\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2\right) = -\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2n}$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ сходится, поэтому данный ряд

расходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\cos\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

3. Рассмотрим ряд с общим членом $u_n = 1\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$. Заметим, что

$$1\Pi(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O\left(x^3\right), \quad x \to 0;$$

В частности, при $x = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}^n}$ имеем

$$u_n = 1\Pi\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) = a_n + b_n + c_n, \tag{1}$$

где

$$a_n \overset{\text{def}}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad b_n \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{2n}, \quad c_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \quad n \to \infty.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ знакочередующийся; он сходится по признаку Лейбница. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, так как он только постоянным множи- телем $-\frac{1}{2}$ отличается от гармонического ряда, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится.

Поэтому в силу равенства (1) данный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

расходится.

Таким образом, ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ являются еще одним примером рядов, члены которых эквивалентны: $u_n = a_n + o\left(a_n\right), n \to \infty$, но один из них сходится, а другой расходится (см. замечание в П. 30.5).

30.10. Суммирование рядов методом средних арифметических. Если заданный числовой ряд расходится, то иногда оказывается полезным определить сумму ряда не обычным способом как предел его частичных сумм - а каким-либо другим. Рассмотрим один из таких способов, называемый суммированием рядов методом средних арифметических.

Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \in C$, составим из его частичных сумм s_n их средние арифметические

$$\sigma_n = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Если существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, то заданный ряд называется суммируемым методом средних арифметических *к* числу σ.

П р и м е р. Расходящийся ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ суммируется методом средних арифметических к числу $\frac{1}{2}$.

В самом деле, в этом случае $s_{2n} = 0, s_{2k-1} = 1, \sigma_{2k} = \frac{1}{2}, \sigma_{2k-1} = = \frac{k}{2k-1}, k = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{1}{2}$.

Таким образом, если под $1-1+1-1+\ldots$ понимать число, к которому этот ряд суммируется методом средних арифметических, то получится равенство

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Замечательно то, что если в формулу

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1$$

для суммы геометрической прогрессии $\{(-1)^n x^n\}$ подставить $x = 1$, то получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \frac{1}{2},$$

т. е. снова формулу (2).

Понятие суммируемости ряда методом средних арифметических является обобщением понятия сходимости ряда, так как, с одной стороны, существуют расходящиеся ряды, суммируемые методом средних арифметических, а с другой - всякий сходящийся ряд суммируем методом средних арифметических к своей сумме. Покажем это.

Лемма 1 *Если последовательность $z_n \in C, n = 1, 2, \ldots$, сходится, то последовательность средних арифметических ее членов*

$$w_n = \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

также сходится, и притом тому же пределу, что и сама последовательность $\{z_n\}$.

$\triangleright$ Пусть $\lim z_n = z_0$. Для любых натуральных чисел n_0 и $n > n_0$ выполняется следующее тождество:

$$\begin{aligned} w_n - z_0 \underset{(2)}{=} \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n} - z_0 = \\ = \frac{z_1 + \ldots + z_{n_0} - n_0 z_0}{n} + \frac{(z_{n_0+1} - z_0) + \ldots + (z_n - z_0)}{n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Согласно определению предела последовательности существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ имеет место неравенство

$$|z_n - z_0| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5}$$

Поскольку $z_1 + \ldots + z_{n_0} - n_0 z_0 -$ фиксированное число, а $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = = 0$, то существует такой номер m_0, что для всех $n > m_0$ выполняется неравенство

$$\frac{z_1 + \ldots + z_{n_0} - n_0 z_0}{n} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Если теперь $n_\varepsilon = \max\{n_0, m_0\}$ и $n > n_0$, то

$$|w_n - z_0| \underset{(4)}{\leqslant} \left|\tfrac{z_1+\ldots+z_n - n_0 z}{n}\right| + \left|\tfrac{(z_{n_0+1}-z_0)+\ldots+(z_n-z_0)}{n}\right|^{<}_{(5)} \quad (6)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - n_0}{n}\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Это и означает, что $\lim_{n\to\infty} w_n = z_0$.$\triangleleft$

2.2 Задание 3

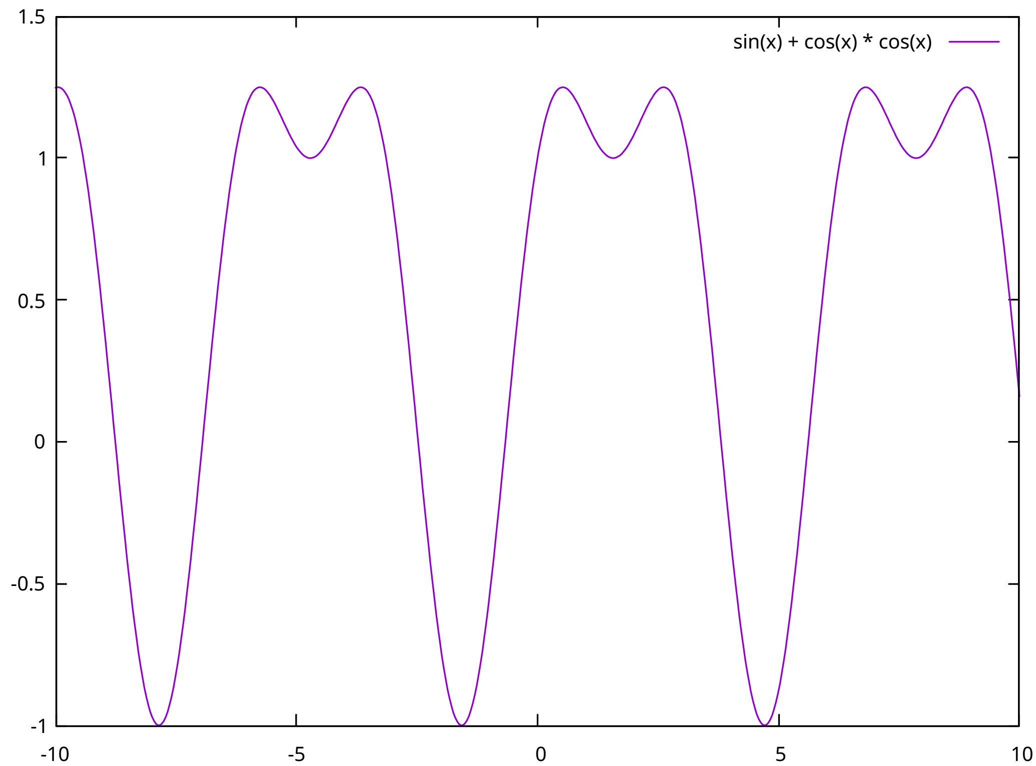

Рис. 1: График sinx + cosx * cosx