Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Поскитт Д.С., группа №22104

____
подпись

Руководитель практики:
преподаватель И. В. Сосновский

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2023

Содержание

1 Описание работы

Задание номер 2 представляет собой, по сути, тренажёр набора специальных символов и использования окружений в LaTex. Задание позволяет научиться использовать такие окружения, как [equation], [document], [theorem] и другие. Они нужны для того, чтобы структурировать текст, придавать набранным выражением или тексту особые свойства (применять к ним особые правила форматирования). Специальные символы позволяют набирать математические или иные выражения с помощью команд LaTex.

Задание номер 3 позволяет научиться отрисовывать графики функции с помощью GNUPLOT в .tex формате и вставлять их в документ с помощью специального окружения.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

§26. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определённом интеграле

Формула замены переменной. Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке Δ_x, а фукнция $\varphi(t)$ – на промежутке Δ_t и $\varphi(\Delta_t) \subset \Delta_x$. Тогда имеет смысл композиция $f \circ \varphi$, то есть сложная функция $f(\varphi(x))$.

Теорема 1 *Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке Δ_t, а функция $\varphi(x)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(x)$ на промежутке Δ_t, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt \tag{1}$$

где

$$\alpha \in \Delta_t, \beta \in \Delta_t, a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$$

(рис. 104)

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в определённом интеграле.

$\triangleright$ Пусть $F(x)$ – какая-либо первообразная для функции $f(x)$ на промежутке Δ_x; тогда функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на промежутке Δ_x, ибо

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Поэтому по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha) = F(b) - F(a) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\ dx. \quad \triangleleft$$

Формула интегрирования по частям.

Теорема 2 *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на отрезке $[a,b]$, то*

$$\int\limits_{a}^{b} udv = uv|_a^b - \int\limits_{a}^{b} vdu \tag{2}$$

Все интегралы в (2) существуют, поскольку подынтегральные функции непрерывны. Для интеграла в левой части равенства, согласно формуле Ньютона-Лейбница, имеем:

$$\int\limits_{a}^{b} (uv)'dx = uv|_a^b. \tag{3}$$

Подставив выражение, стоящее в правой части неравенства, в (3), получим

$$\int\limits_{a}^{b} udv + \int\limits_{a}^{b} vdu = uv|_a^b,$$

что равносильно (2). $\triangleleft$

Замечание. Можно доказать, что формула интегрирования по частям остаётся верной и в том случае, когда u и v непрерывны, а их производные кусочно непрерывны (см. 2).

Примеры. 1. Применим формулу интегрирования по частям для вычисления интеграла $\int\limits_1^2 \ln x\ dx$:

$$\int\limits_1^2 \ln x \; dx = x\ln x|_1^2 - \int\limits_1^2 dx = 2\ln 2 - 1.$$

2. Приведём пример интеграла, при вычислении которого применим и замену переменной, и интегрирование по частям. Вычислим интеграл $I = \int\limits_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x} \; dx$

Сделав сначала замену переменной $t = \cos x$, а затем проинтегрировав по частям, получим

$$I = \int\limits_0^\pi \sin x\sqrt{1+\cos^2 x} \; dx = \int\limits_{-1}^1 \sqrt{1+t^2} \; dt = \int\limits_{-1}^1 \frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}} \; dt =$$

$$= \int\limits_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} + \int\limits_{-1}^1 t \; \frac{t \; dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln(t+\sqrt{1+t^2})|_{-1}^2 + \int\limits_{-1}^1 t \; d\sqrt{1+t^2} =$$

$$= \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + t\;\sqrt{1+t^2}|_{-1}^1 - \int\limits_{-1}^1 \sqrt{1+t^2} \; dt = \ln(1+\sqrt{2}) + 2\sqrt{2} - I.$$

Из получившегося относительно I находим

$$I = \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}.$$

Заметим, рассмотренный интеграл можно вычислить,и применяя только замену переменной. Для этого можно воспользоваться уже вычисленным интегралом $\int 1 + x^2 \; dx$ (пример в п. 19.4).

3*. Покажем, что для любого $n = 1, 2, \ldots$

$$I_n = \int\limits_0^{\pi\backslash 2} \sin^n x \; dx = \int\limits_0^{\pi\backslash 2} \cos^n x \; dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2} & \text{при } n \text{ чётном} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & \text{при } n \text{ нечётном.} \end{cases} \tag{4}$$

Под $n!!$, $n \in \mathbb{N}$ понимается произведение всех наутральных чисел, не превышающих n и имеющих ту же чётность, что и число n:

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-2) \cdot 2n,$$

$$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)$$

По определению $0!! = 1$.

Положив для удобства $I_0 = \int\limits_0^{\pi/2} dx = \pi/2$ и проинтегрирорав по частям интеграл I_n при $n \geq 2$, имеем

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x \; dx = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \; d(-\cos x) =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x|_0^{\pi/2} + (n-1) \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x \; dx =$$

$$= (n-1) \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x (1 - \sin^2 x) dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n,$$

откуда

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \tag{5}$$

Заметим, что

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int\limits_0^{\pi/2} \sin x \; dx = 1. \tag{6}$$

Поэтому при $n = 2k+1$,т.е при нечётном n,

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \ldots = \frac{2k(2k-2)\ldots 2}{(2k+1)(2k-1)\ldots 1} I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, \tag{7}$$

а при $n = 2k$, т.е. при чётном n,

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \ldots = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 1}{2k(2k-2)\ldots 2} I_0 = \frac{(2k-1)!!}{2k!!} \; \frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

Равенство интегралов $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x \; dx$ и $\int\limits_0^{\pi/2} cos^n x \; dx$ сразу получается с помощью замены переменных $x = \frac{\pi}{2} - t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Таким образом, формулы (4), доказаны. Из них легко получается формула Валлиса*)

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{x\to\ 0} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2. \tag{9}$$

В самом деле, проинтегрировав по отрезку $[0, \pi/2]$ неравенства

$$\sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x \le \sin^{2n-1} x, \quad n = 1, 2, \ \ldots,$$

получим

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\ dx \le \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\ dx \le \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x/dx,$$

т.е

$$I_{2n+1} \le I_{2n} \le I_{2n-1}. \tag{10}$$

Отсюда, в силу формул (4) имеем

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \le \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\ \frac{\pi}{2} \le \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}. \tag{11}$$

Если ввести обозначения

$$x_n = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2, \quad y_n = \frac{1}{2n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \tag{12}$$

То неравенства (11) можно записать в виде

$$x_n \le \frac{\pi}{2} \le y_n, \tag{13}$$

где

$$y_n - x_n \underset{(12)}{=} \frac{1}{2n}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \frac{1}{2n} x_n \underset{(13)}{\le}$$
$$\underset{(13)}{\le} \frac{1}{2n}\ \frac{\pi}{2} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$, т.е. длины отрезков $[x_n, y_n]$, содержащих точку $\pi/2$, стремятся к нулю, а это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{\pi}{2}.$$

Равенство $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$ в силу первой формулы (12) и представляет собой формулу Валлиса.

2.2 Задание 3

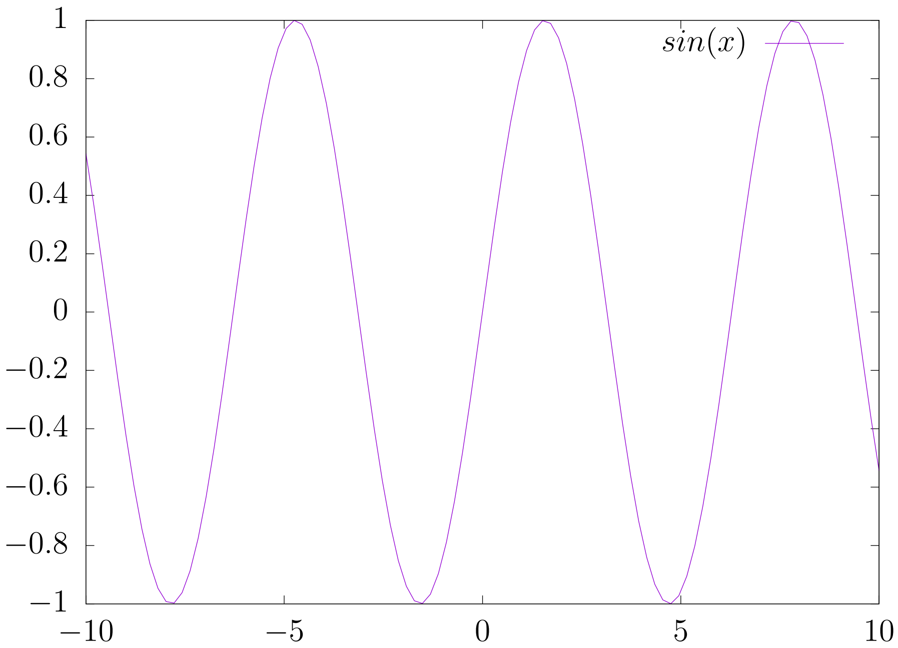

Рис. 1: sin(x)