Министерство образования и науки Российской федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнила:
Криволап У.А группа 22104

____
подпись

Руководитель практики:
Сосновский Игорь Викторович:

____
подпись

Итоговая оценка:

____
подпись

Петрозаводск – 2023

Содержание

1 Описание работы

На протяжении второго семестра во время прохождения практики по дисциплине "Компьютерные технологии в информатике"были получены различные навыки.
Второе задание представляло собой верстку документа. Во время его выполнения была освоена программа LaTeX: набор математических формул, рубрикация текста и т.д. Данная программа является высококачественной системой набора сложных текстов с различными математическими формулами.
Во время выполнения третьего задания был освоен интерпретатор команд gnuplot. Данная программа позволяет создавать различные двух- или трех- мерные графики. Также во время выполнения задания 3 нужно научиться с помощью специального окружения вставлять отрисованные графики в документ.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Как и для точки, окрестностью множества называется всякое содержащее его открытое множество.

Аналогично одномерному случаю для всякого множества $X \subset R^n$ вводятся понятия его точек прикосновения, предельных и изолированных точек (см. п. 6.1 и п. 6.9).

Определение 1 *Точка пространства (конечная или бесконечно удаленная) называется точкой прикосновения множества, если любая ее окрестность содержит точки этого множества.*

Точки самого множества являются, очевидно, его точками прикосновения, так как любая окрестность точки множества содержит саму эту точку. Точки прикосновения могут и не принадлежать самому множеству. Например, точки $x = 0$ и $x = 1$ являются точками прикосновения интервала $X = (0, 1)$ и не принадлежат ему.

Если точка $x^{(0)}$ является конечной точкой прикосновения множества $X \subset R^n$, то любая ее окрестность (в частности, сферическая окрестность $U(x^{(0)}; \frac{1}{m})$) содержит точку этого множества, обозначим ее $x^{(m)}$:

$$x^{(m)} \in U\left(x^{(0)}; \tfrac{1}{m}\right) \cap X, \quad m = 1, 2, \dots$$

Тогда $\rho\left(x^{(m)}, x^{(0)}\right) < \frac{1}{m}$ и, следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x^{(0)}$$

т. е. всякая конечная точка прикосновения множества является пределом последовательности его точек.

Ясно, что справедливо и обратное утверждение: если точка пространства является пределом последовательности точек множества, то она - его точка прикосновения, так как любая ее окрестность содержит все точки указанной последовательности, начиная с некоторого номера, т. е. содержит точки множества.

Аналогично, бесконечно удаленная точка ∞ является точкой прикосновения множества $X \subset R^n$ тогда и только тогда, когда существует такая
последовательность точек $x^{(m)} \in X, m = 1, 2, \dots$, что $\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = \infty$

Действительно, если ∞ - точка прикосновения множества X, то в любой ее окрестности $U\left(\infty; \frac{1}{m}\right)$ содержится точка этого множества, обозначим ее $x^{(m)}$, т. е. $x^{(m)} \in U\left(\infty; \frac{1}{m}\right) \cap X$. Тогда $\rho\left(x^{(m)}, 0\right) > m$, где $m = 1, 2, \dots$ Отсюда следует, что $\lim_{m\to\infty} \rho\left(x^{(m)}, 0\right) = \infty$, а это означает, что $\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = \infty$.

Наоборот, если существует такая последовательность $x^{(m)} \in X$, $m = 1, 2, \ldots$, что $\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = \infty$, то в любой окрестности бесконечно удаленной точки содержатся все члены этой последовательности, начиная с некоторого номера, т. е. содержатся точки множества X. Отметим еще, что условие существования в множестве $X \subset R^n$ последовательности точек, стремящейся к бесконечности ∞, равносильно, как в этом легко убедиться, неограниченности этого множества.

Поэтому бесконечно удаленная точка является точкой прикосновения множества в том и только том случае, когда оно неограниченно.

Определение 2 *Точка x (конечная или бесконечно удаленная) называется* предельной точкой *некоторого множества, если в любой ее окрестности содержится точка этого множества, отличная от нее самой.*

С помощью понятия проколотой окрестности это определение можно перефразировать следующим образом: точка x называется предельной точкой множества X, если любая ее проколотая окрестность содержит по крайней мере одну точку этого множества.

Очевидно, что *предельная точка некоторого множества является и его точкой прикосновения.*

Если точка x является предельной точкой множества X, то, выбрав в каждой окрестности $U(x; 1/m)$ точку из множества X, отличную от x, и обозначив ее $x^{(m)}$, получим такую последовательность $x^{(m)} \in X, \quad m = 1, 2, \ldots$, что $\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x$ и $x^{(m)} \neq x, m = 1, 2, \ldots$, т. е. если x - предельная точка множества, то существует последовательность точек этого множества, сходящаяся к x, у которой ни одна из ее точек не совпадает с точкой x.

Определение 3 *Если у точки множества существует окрестность, не содержащая никаких других его точек, кроме нее самой, то эта точка называется* изолированной точкой этого множества.

Как и в одномерном случае (п. 6.9.), каждая точка прикосновения множества является либо его изолированной точкой, либо предельной.

Определение 4 *Совокупность всех конечных точек прикосновения множества называется его замыканием. Замыкание множества X обозначается $\bar{X}$.*

Определение 5 *Множество называется замкнутым, если оно содержит все свои конечные точки прикосновения.*

Поскольку каждая гочка множества является и точкой его прикосновения, т. е. $X \subset \bar{X}$, то замкнутость множества X означает, что

$$X = \bar{X} \tag{1}$$

Пустое множество считается по определению замкнутым.

Упражнение 3. Доказать что $diam\bar{X} = diamX$.

Примерами замкнутых множеств являются множества вида

$$Q^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : a_i \le x_i \le a_i + h, i = 1, 2, \ldots, n\} \tag{2}$$

где $h > 0, o_i \in R, i = 1, 2, \ldots, n$, называемые замкнутыми n-мерными кубами с ребрами длины h, параллельными координатным осям. Эти кубы являются замыканиями кубов

$$F^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : a_i < x_i < a_i + h, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$$

называемых также открытыми кубами (они являются открытыми множествами):

$$Q^n = \overline{F^n}$$

Лемма 1 *Замыкание всякого множества является замкнутым множеством.*

▷ Если X - некоторое множество, x - точка прикосновения его замыкания $\bar{X}$ и $U = U(x)$ - ее произвольная окрестность, то согласно определению точки прикосновения в этой окрестности имеется точка $y \in \bar{X}$. Поскольку U - открытое множество, то оно является и окрестностью точки y, а так как включение $y \in \bar{X}$ означает, что точка y является точкой прикосновения множества X, то в множестве U имеется точка множества X. Таким образом, в любой окрестности U точки x имеются точки множества X, а это означает, что $x \in \bar{X}$, т. е. $\bar{X}$ содержит все свои точки прикосновения.◁

Для всякого множества $X \in R^n$ множество $R^n \backslash X$ называется его дополнением в пространстве R^n. Оказывается, что открытые множества (будем их обозначать буквой G) и замкнутые множества (их будем обозначать F) являются дополнениями друг друга в пространстве R^n.

Лемма 2 *Дополнение открытого множества является замкнутым, а дополнение замкнутого множества - открытым множеством.*

▷ Пусть $F-$ замкнутое множество и $G = R^n \backslash F$. Если $x \in G$, то $x \notin F$, и, следовательно, точка x не является точкой прикосновения множества F. Поэтому существует окрестность $U(x)$ точки x, не содержащая точек множества F, т. е. содержащаяся в G. Таким образом, любая точка множества G является внутренней, а это означает, что G — открытое множество.

Пусть G — открытое множество, $F = R^n \backslash G$ и $x \in G$. Поскольку G — открытое множество, то оно является окрестностью точки x, причем, являясь дополнением множества F, оно не содержит его точек. Следовательно, никакая точка $x \in G$ не является точкой прикосновения множества F. Иначе говоря, все точки прикосновения множества F содержатся в нем самом, а это означает, что F замкнутое множество. ◁

2.2 Задание 3

Рис. 1: Функция sin(x)