Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Хорошилов К. А. группа # 22104

____

подпись

Руководитель практики:
преподаватель И. В. Сосновский

____

подпись

Итоговая оценка:

____

оценка

Петрозаводск – 2023

Содержание

1 Описание работы

В задания выполнялись с использованием системы верстки LaTeX.

Во втором задании необходимо было подготовить документ, содержащий математический текст, предоставленный инструктором. Для выполнения данного задания использовались такие элементы системы LaTeX, как специальные окружения, позволяющие добавить автоматическую нумерацию формул, команды и специальные знаки для форматирования текста, а также метки на формулы и ссылки с автоматической нумерацией на них. Помимо всего этого также использовались включенные и выключенные формулы, сами формулы также были написаны с помощью специальных команд LaTeX. Использовались команды для правильного оформления документа, позволящие добавить заголовки и подзаголовки в статью.

В третьем задании небходимо было с помощью gnuplot построить изображение кривой в декартовых координатах и разместить его в документе, подготовленном во время выполнения второго задания. Для выполнения данного задания с помощью gnuplot было создано изображение графика кривой в формате pdf. График кубической параболы. Данное изображение было добавлено (импортировано) в конец документа второго задания.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Перестановки и сочетания

1 Перестановки и сочетания

Пусть задано конечное множество элементов. Выясним, сколькими различными способами можно упорядочить элементы этого множества.

Определение 1 Группы элементов, состоящие из одних и тех же элементов и отличающиеся друг от друга только их порядком, называются перестановками этих элементов.

Число всевозможных перестановок n элементов обозначается P_n. Как это будет ниже показано, оно равно произведению всех натуральных чисел от 1 до n. Для краткости это произведение обозначают синволом $n!$ (читается „эн факториал“), т. е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$. Для удобства полагают

$$0! = 1. \tag{1}$$

Пример 1 Группы $\{1,2,3\}$, $\{1,3,2\}$, $\{2,1,3\}$, $\{2,3,1\}$, $\{3,1,2\}$ и $\{3,2,1\}$ являются всевозможными перестановками элементов 1, 2 и 3.

Лемма 1 *Если P_k — число всех перестановок из k элементов и $k > 1$, то*

$$P_k = kP_{k-1}. \tag{2}$$

$\triangleright$ Множество всех перестановок из заданных k элементов разбивается на группы, в каждой из которых на первом месте стоит один и тот же элемент. Число таких групп равно k — числу всех элементов.

В перестановках, входящих в одну и ту же группу, на последующих $k-1$ местах могут располагаться оставшиеся $k-1$ элементов в любом порядке. Поэтому число перестановок в каждой группе равно P_{k-1}.

Каждая перестановка из k элементов попадает в одну из описанных групп и в точности один раз. Поэтому для числа P_k всех перестановок из k элементов имеет место соотношение (2). $\triangleleft$

Теорема 1 *Число всевозможных перестановок из n элементов равно $n!$:*

$$P_n = n!. \tag{3}$$

$\rhd$ Докажем теорему методом математической индукции. Если $n = 1$, то, очевидно, $P_1 = 1 = 1!$. Если для некоторого $k \in N$ имеет место формула $P_k = k!$, то согласно лемме $P_{k+1} = (k+1)P_k = (k+1)k! = (k+1)!$. $\lhd$

Выясним теперь, сколько подмножеств, содержащих m элементов, имеет множество, состоящее из n элементов, $1 \le m \le n$.

Определение 2 Каждое множество, содержащее m элементов из числа n заданных, называется *сочетанием из n элементов по m*.

Подчеркнем, что сочетание определено как множество некоторых элементов без рассмотрения порядка, в котором они расположены.

Число всех сочетаний n из элементов по m обозначается C_n^m.

Пример 2 Множества {1,2}, {1,3}, {2,1,3} и {2,3}, {3,1,2} образуют всевозможные сочетания их трех элементов 1, 2, 3 по два.

Из определения сочетаний вытекают следующие два свойства.

1 *Имеет место формула*

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, ..., n, \tag{4}$$

где

$$C_n^0 = 1. \tag{5}$$

$\rhd$ Действительно, если из n элементов выбрать какое-либо сочетание, содержащее k элементов, то элементы, не вошедшие в него, составят сочетание из $n - k$ элементов. Причем, таким путем получатся все сочетания из n элементов по $n - k$ и каждое по одному разу. Поэтому число сочетаний из n элементов по k, т. е. C_n^k, равняется числу сочетаний из n элементов по $n - k$, т. е. числу C_n^{n-k}. $\lhd$

2 *Имеет место формула*

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1. \tag{6}$$

$\triangleright$ Пусть дано $n+1$ элементов. Зафиксируем один из элементов и разобьем все сочетания по $k+1$ элементов на две группы: содержащие этот элемент и не содержащие его. Число первых C_n^k (ибо если удалить фиксированный элемент из каждого содержащего его сочетания по $k+1$ элементов, то получатся всевозможные сочетания из n элементов по k и каждое по одному разу), число вторых равно C_n^{k+1} (ибо они образуют всевозможные сочетания по $k+1$ элементов из n элементов, получившихся удалением фиксированного элемента из $n+1$ заданных). Это и означает справедливость формулы (6). $\triangleleft$

Докажем теперь формулу для числа всевозможных сочетаний из n элементов по m.

Теорема 2 *Для числа сочетаний имеет место формула*

$$C_n^m = \frac{P_n}{P_m P_{n-m}} \tag{7}$$

$\triangleright$ Множество всех перестановок из заданных n элементов разбивается на группы, в кажой из которых на m первых местах стоят одини и те же элементы (в том или ином порядке), а следовательно, и на последних $n-m$ местах также находятся одни и те же элементы. Число таких групп равно числу способов, которыми из данных n элементов можно выбрать m элементов, т. е. равно числу C_n^m.

В перестановках, входящих в одну и ту же группу, на m первых местах выбранные элементы могут быть расположены любым способом, а число таких способов равно P_n всевозможных перестановок из m элементов. Элементы же, стоящие на $n-m$ последних местах, также могут находиться в любом порядке, т. е. из них может быть образована любая перестановка из $n-m$ элементов, а число таких перестановок равно P_{n-m}.

Таким образом, число перестановок в каждой группе равно $P_m P_{n-m}$, и поскольку число всех групп равно C_n^m, причем каждая перестановка из n заданных элементов входит только один раз в одну из указанных групп, то для числа всех перестановок P_n получаем формулу

$$P_n = C_n^m P_m P_{n-m},$$

из которой и следует формула (7) $\triangleleft$

Следствие 1

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{8}$$

$\triangleright$ Формула (8) вытекает из формулы (7) в силу равенства (3) $\triangleleft$

Отметим, что формулы (4) и (6) можно доказать, подставив в них значения сочетаний согласно формуле (8) и проведя в случае формулы (6) нужные вычисления. Однако приведенные выше доказательства раскрывают смысл формул и дают возможность получить их, не зная заранее, как они выглядят.

Числа C_n^k можно последовательно находить с помощью следующей треугольной таблицы, называемой *треугольником Паскаля*[1], в которой первые и последние числа во всех строчках равны единице, и, начиная с третьей строчки, каждое число в строчке, отличное от первого и последнего, получается сложением двух ближайших к нему чисел предшествующей строчки:

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1
\end{array}$$

В силу (6) в n-й строчке будут стоять числа

$$C_n^0, C_n^1, ..., C_n^k, ..., C_n^n.$$

[1]Б. Паскаль (1623 – 1662) — французский философ, писатель, физик и математик.

2.2 Задание 3

Перестановки и сочетания
Кубическая параболла

1 Перестановки и сочетания

Пусть задано конечное множество элементов. Выясним, сколькими различными способами можно упорядочить элементы этого множества.

Определение 1 Группы элементов, состоящие из одних и тех же элементов и отличающиеся друг от друга только их порядком, называются перестановками этих элементов.

Число всевозможных перестановок n элементов обозначается P_n. Как это будет ниже показано, оно равно произведению всех натуральных чисел от 1 до n. Для краткости это произведение обозначают синволом $n!$ (читается „эн факториал“), т. е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$. Для удобства полагают

$$0! = 1. \tag{1}$$

Пример 1 Группы {1,2,3}, {1,3,2}, {2,1,3}, {2,3,1}, {3,1,2} и {3,2,1} являются всевозможными перестановками элементов 1, 2 и 3.

Лемма 1 *Если P_k — число всех перестановок из k элементов и $k > 1$, то*

$$P_k = kP_{k-1}. \tag{2}$$

$\triangleright$ Множество всех перестановок из заданных k элементов разбивается на группы, в каждой из которых на первом месте стоит один и тот же элемент. Число таких групп равно k — числу всех элементов.

В перестановках, входящих в одну и ту же группу, на последующих $k - 1$ местах могут располагаться оставшиеся $k - 1$ элементов в любом порядке. Поэтому число перестановок в каждой группе равно P_{k-1}.

Каждая перестановка из k элементов попадает в одну из описанных групп и в точности один раз. Поэтому для числа P_k всех перестановок из k элементов имеет место соотношение (**??**). $\lhd$

Теорема 1 *Число всевозможных перестановок из n элементов равно $n!$:*

$$P_n = n!. \tag{3}$$

$\rhd$ Докажем теорему методом математической индукции. Если $n = 1$, то, очевидно, $P_1 = 1 = 1!$. Если для некоторого $k \in N$ имеет место формула $P_k = k!$, то согласно лемме $P_{k+1} = (k+1)P_k = (k+1)k! = (k+1)!$. $\lhd$

Выясним теперь, сколько подмножеств, содержащих m элементов, имеет множество, состоящее из n элементов, $1 \leq m \leq n$.

Определение 2 Каждое множество, содержащее m элементов из числа n заданных, называется *сочетанием из n элементов по m*.

Подчеркнем, что сочетание определено как множество некоторых элементов без рассмотрения порядка, в котором они расположены.

Число всех сочетаний n из элементов по m обозначается C_n^m.

Пример 2 Множества {1,2}, {1,3}, {2,1,3} и {2,3}, {3,1,2} образуют всевозможные сочетания их трех элементов 1, 2, 3 по два.

Из определения сочетаний вытекают следующие два свойства.

1 *Имеет место формула*

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, ..., n, \tag{4}$$

где

$$C_n^0 = 1. \tag{5}$$

$\rhd$ Действительно, если из n элементов выбрать какое-либо сочетание, содержащее k элементов, то элементы, не вошедшие в него, составят сочетание из $n-k$ элементов. Причем, таким путем получатся все сочетания из n элементов по $n-k$ и каждое по одному разу. Поэтому число сочетаний из n элементов по k, т. е. C_n^k, равняется числу сочетаний из n элементов по $n-k$, т. е. числу C_n^{n-k}. $\lhd$

2 *Имеет место формула*

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1. \tag{6}$$

$\triangleright$ Пусть дано $n+1$ элементов. Зафиксируем один из элементов и разобьем все сочетания по $k+1$ элементов на две группы: содержащие этот элемент и не содержащие его. Число первых C_n^k (ибо если удалить фиксированный элемент из каждого содержащего его сочетания по $k+1$ элементов, то получатся всевозможные сочетания из n элементов по k и каждое по одному разу), число вторых равно C_n^{k+1} (ибо они образуют всевозможные сочетания по $k+1$ элементов из n элементов, получившихся удалением фиксированного элемента из $n+1$ заданных). Это и означает справедливость формулы (**??**). $\triangleleft$

Докажем теперь формулу для числа всевозможных сочетаний из n элементов по m.

Теорема 2 *Для числа сочетаний имеет место формула*

$$C_n^m = \frac{P_n}{P_m P_{n-m}} \tag{7}$$

$\triangleright$ Множество всех перестановок из заданных n элементов разбивается на группы, в кажой из которых на m первых местах стоят одини и те же элементы (в том или ином порядке), а следовательно, и на последних $n-m$ местах также находятся одни и те же элементы. Число таких групп равно числу способов, которыми из данных n элементов можно выбрать m элементов, т. е. равно числу C_n^m.

В перестановках, входящих в одну и ту же группу, на m первых местах выбранные элементы могут быть расположены любым способом, а число таких способов равно P_n всевозможных перестановок из m элементов. Элементы же, стоящие на $n-m$ последних местах, также могут находиться в любом порядке, т. е. из них может быть образована любая перестановка из $n-m$ элементов, а число таких перестановок равно P_{n-m}.

Таким образом, число перестановок в каждой группе равно $P_m P_{n-m}$, и поскольку число всех групп равно C_n^m, причем каждая перестановка из n заданных элементов входит только один раз в одну из указанных групп, то для числа всех перестановок P_n получаем формулу

$$P_n = C_n^m P_m P_{n-m},$$

из которой и следует формула (**??**) $\triangleleft$

3

Следствие 1

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{8}$$

$\triangleright$ Формула (**??**) вытекает из формулы (**??**) в силу равенства (**??**) $\triangleleft$

Отметим, что формулы (**??**) и (**??**) можно доказать, подставив в них значения сочетаний согласно формуле (**??**) и проведя в случае формулы (**??**) нужные вычисления. Однако приведенные выше доказательства раскрывают смысл формул и дают возможность получить их, не зная заранее, как они выглядят.

Числа C_n^k можно последовательно находить с помощью следующей треугольной таблицы, называемой *треугольником Паскаля*[1], в которой первые и последние числа во всех строчках равны единице, и, начиная с третьей строчки, каждое число в строчке, отличное от первого и последнего, получается сложением двух ближайших к нему чисел предшествующей строчки:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\;\;2\;\;1 \\ 1\;\;3\;\;3\;\;1 \\ 1\;\;4\;\;6\;\;4\;\;1 \\ 1\;\;5\;\;10\;\;10\;\;5\;\;1 \end{array}$$

В силу (**??**) в n-й строчке будут стоять числа

$$C_n^0, C_n^1, ..., C_n^k, ..., C_n^n.$$

2 Кубическая параболла

[1]Б. Паскаль (1623 – 1662) — французский философ, писатель, физик и математик.

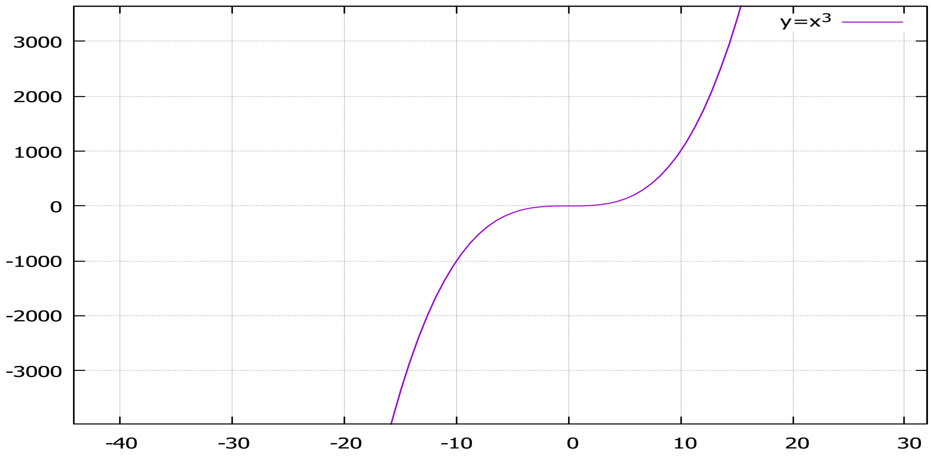

Рис. 1: График кубической параболлы $y = x^3$