Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Калинин А. Д. группа #22104

____

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____

подпись

Итоговая оценка:

____

оценка

Петрозаводск – 2022

Содержание

1 Описание работы

Познакомившись с издательской системой LaTeX на первом курсе в университете я открыл для себя отличный инструмент, позволяющий описывать в компьютере математические формулы проще, чем как-либо ещё. Выполняя первое задание я ознакомился со структурой LaTeX документа и общей концепцией работы с этой системой, а также научился транслировать низкоуровневый текст формата .tex в более удобночитаемые файлы, как, например, .pdf. Во втором задании мне предстояло опробовать набор разнообразных математических формул при помощи комбинирования различных команд и разобраться с оформлением документа. Третье задание представляло собой построение графика функций, используя отдельный интерпретатор gnuplot, с последующей трансляцией этого графика в файл .tex для интеграции в свой документ. Научившись работать в системе LaTeX я получил возможность цифровизировать свои конспекты по математике, не теряя при этом удобства чтения как с тетради.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Кроме того, согласно условию $x_k \to 0$ имеем $\frac{1}{x_k} \to \infty$, откуда в силу неравенства (9.4) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty \tag{1}$$

В результате имеем

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}, \tag{2}$$

где

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} = \frac{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}}{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)} = e, \tag{3}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right) = e. \tag{4}$$

Из (9.7), (9.8) и (9.9) следует, что (см. обозначения в п. 6.6)

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{5}$$

Пусть теперь $x_k < 0$ и $x_k \to 0, k = 1, 2, \ldots$ Положим $y_k = -x$, тогда $y_k < 0$ и $x_k \to 0, k = 1, 2, \ldots$ Без ограничения общности будем считать, что $y_k < 1$ (с некоторого номера это неравенство заведомо выполняется). Имеем

$$\lim_{k\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x_k}} = \lim_{k\to\infty}(1-y_k)^{\frac{-1}{y_k}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{1-y_k}\right)^{\frac{1}{y_k}} =$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1-y_k+y_k}{1-y_k}\right)^{\frac{(1-y_k+y_k}{y_k}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{y_k}{1-y_k}\right)^{\frac{(1-y_k)}{y_k+1}} \tag{6}$$

Положим теперь $z_k = \frac{y_k}{1-y_k}$. Очевидно,

$$z_k > 0, z_k \to 0. \tag{7}$$

Поэтому

$$\lim_{k\to\infty}(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}=\lim_{k\to\infty}(1+z_k)^{\frac{1}{z_k+1}}=$$

$$\lim_{k\to\infty}(1+z_k)^{\frac{1}{z_k}}\lim_{k\to\infty}(1+z_k)=e. \tag{8}$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{\to-0}(1+X)'f'=e.$$

Отсюда в силу теоремы 2 из п. 6.6 и следует равенства (9.2). $\lhd$

Вычислим с помощью (9.2) некоторые другие пределы. Покажем прежде всего, что

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}, a>0, a\neq1, \tag{9}$$

в частности

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1. \tag{10}$$

В самом деле,

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}.$$

Докажем ещё, что

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1 \tag{11}$$

Действительно, положив $y=a^x-1$ и, следовательно, $x=\frac{\ln(1+y)}{\ln a}$, получим $\lim\limits_{x\to0}y=0$, а поэтому

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to0}\frac{y\ln a}{\ln(1+y)}=\ln a.$$

9.2. Сравнение функций в окресности заданной точки. Как изветно, сумма, разность и произведение бесконечно малоых являются бесконечно малыми. Частное же бесконечно алых может быть и не бесконечно малой, однако отношение бесконечно малых позволяет сравнивать из "по порядку убывания". Аналогично можно сравнивать "по порядку роста"бесkончно большие. Перейдем к точным определениям.

Пусть функции f и g заданы на множестве X и x_0 - конечная или бесконечная удаленная точка прикосновения этого множества. При этом возможны случаи, когда $x_0\in X$ и когда $x_0\notin X$. Будем предполагать, что существуют такие окрестность $U=U(x_0)$ точки x_0 и функция φ, заданная на $X\cap U$, что для всех $x\in X\cap U$ выполняется равенство

$$f(x)=\varphi(x)g(x). \tag{12}$$

В частности, если функции f и g заданы в точке x_0, то и функция φ задана в этой точке, а если f и g не заданы в ней, то не задана в ней и функция φ.

Определение 1. Функция f называется *функцией, ограниченной относительно функции g в окрестности точки x_0*, если функция φ ограниченна.

В этом случае существует такая постоянная $c>0$, что для всех $x\in X\cap U$ выполняется неравенство

$$\mid\varphi(x)\mid c, \tag{13}$$

а, следовательно, и неравентсво

$$\mid f(x)\mid\leqslant c\mid g(x)\mid. \tag{14}$$

Условие (9.20) равносильно условиям (9.18) и (9.19). Действительно, если выполняется условие (9.20), то при

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq0,\\ 0, g(x)=0\end{cases}$$

выполняются условия (9.18) и (9.19).

Если функция f ограниченая относительно функции g в окрестности точки x_0, то пишут

$$f = O(g), x \to x_0 \tag{15}$$

(читается: f есть "O большое"от g).

Определение 2. Функция f называется функцией того же порядка при x $\to x_0, g,$ c$_1 > 0$ и $c_2 > 0$, что для всех x $\in X \cap Uc_1 \leqslant\mid \varphi(x) \mid\leqslant c_2$.(16)

В этом случае для всех x $\in X \cap Uc_1 \mid g(x) \mid\leqslant\mid f(x) \mid\leqslant c_2 \mid g(x) \mid$.(17)

Если функция f того же порядка при $x \to x_0$, что и функция g, то пишут $f \cong g, x \to x_0$. Очевидно, что функция f того же порядка при $x \to x_0$, что и функция g, тогда и только тогда, когда $f = O(g)$ и $g = O(f), x \to x_0$.

Определение 3. Функция f называется *бесконечно малой относительно функции g при* $x \to x_0$, если функция φ бесконечно малая при $x \to x_0$, т.е. если

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0. \tag{18}$$

В этом случае пишут

$$f = o(g), x \to x_0 \tag{19}$$

(читается: f есть "o малое"от g при $x \to x_0$).

Определение 4. Функция f называется *эквивалетнонй функции g* (или асимптотически равной ей) при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 1. \tag{20}$$

2.2 Задание 3