Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Гужиев Е. С. группа #22103

____
подпись

Руководитель практики:
преподаватель И. В. Сосновский

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2023

Содержание

1 Описание работы

В этом семестре мы впервые познакомились с LaTex. В процессе работы я изучил все доступные скринкасты, ознакомился с учебниками из предложенной литературы и приступил к выполнению трёх поставленных задач. В этом отчёте я представлю вам две из них, первая связана с созданием документа, используя LaTex, с математическим текстом, предоставленным инструктором. Я добавил разделы и автоматическую нумерацию формул, а также создал новые окружения для примеров, определений и других математических объектов. В последней задаче я построил кривую в декартовых координатах, используя интерпретатор команд gnuplot, и добавил это изображение в документ, который я создал во втором практическом задании. Я считаю, что успешно справился с поставленными заданиями и усвоил весь материал.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

8.1. Многочлены и рациональные функции.

Теорема 1. *Многочлен непрерывен на всей числовой оси.*

$\triangleright$ Действительно, во-первых, постоянная на всей числовой оси функция непрерывна во всех точках; во-вторых, функции $x^k, k = 1, 2, \cdots$, также непрерывны на всей числовой оси, а любой многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ является линейной комбинацией функций $1, x, x^2, \cdots , x^n$ с коэффициентами $a_0, a_1, \cdots , a_n$, поэтому, согласно следствию из свойства 6° пределов функции в п. 6.7, он непрерывен на всей числовой оси.$\triangleleft$

Теорема 2. *Рациональная функция $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, непрерывна во всех точка числовой оси, в которых $Q(x) \neq 0$.*

$\triangleright$ Это сразу следует из непрерывности многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ на всей числовой оси и непрерывности частного непрерывных функций во всех точках, в которых знаменатель не обращается в нуль.$\triangleleft$

8.2. Показательная и логарифмическая функции. Перечислим основные свойства степеней $a^r, a > 0$, с рациональными показателями $r \in Q$ (см. п. 2.1.).

1°. *Пусть $r_1 < r_2$. Если $a > 1$, то $a^{r_1} < a^{r_2}$, а если $a < 1$, то $a^{r_1} > a^{r_2}$.*

2°. $a^{r_1}a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$.

3°. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1r_2}$.

Эти свойства доказываются в курсе элементарной математики в преположении существования и однозначной определенности a^r для любого рационального $r, a > 0$, а это было доказано в п. 7.3.

Вспомним ещё, что $a^0 = 1$ и что $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$.

Из свойства 1° вытекает, что для любого $r \in Q$ выполняется неравенство $a^r > 0$. В самом деле, если $a \geq 1$ и $r \geq 0$, то по свойству 1° $a^r \geq a^0 = 1 > 0$. Отсюда следует, что $a^{-r} = \frac{1}{a^r} > 0$. Аналогично рассматривается случай $0 < a < 1$.

Нашей ближайшей задачей является определение значений выражения a^x для любого действительного числа x и $a > 0$. Затем будут изучены свойства функции a^x.

Лемма 1. *Для любого $a > 0$ имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{-1}{n}} = 1 \tag{1}$$

Следствие 1. *Для любого $a > 0$ имеет место равенство*

$$\lim_{r\to 0, r\in Q} a^r = 1. \tag{2}$$

$\triangleright$ Пусть сначала $a > 1$. Для любого $n \in N$ положим

$$x_n = a^{\frac{1}{n}} - 1. \tag{3}$$

Поскольку $\frac{1}{n} > 0$, то $a^{\frac{1}{n}} > a^0 = 1$ и, следовательно,

$$x_n > 0, n = 1, 2, \cdots \tag{4}$$

Из (3) и (4) вытекает, что

$$a = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + \cdots > nx_n$$

.

Отсюда и из неравенства (4) получаем $0 < x_n < \frac{a}{n}$, а так как $\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$, то $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, что в силу (3) и означает, что

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1. \tag{5}$$

Если $a < 1$, то $b = \frac{1}{a} > 1$, и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

Наконец, если $a = 1$, то утверждение (1) очевидно, так как

$$1^{\frac{1}{n}} = 1, n = 1, 2, \cdots$$

Из доказанного следует, что при любом $a > 0$ имеет место и равенство

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{-1}{n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}} = 1. \triangleleft$$

Докажем следствие.

$\triangleright$ Для всех $a > 0$ функция a^r монотонна на множестве рациональных чисел Q. Для каждого действительного числа x множества рациональных чисел $r < x$ и $r > x$ не пусты и точка x является их точкой прикосновения. Поэтому, согласно следствию из теоремы 4 п. 6.11, существуют односторонние пределы $\lim_{r\to z-0} a^r$ и $\lim_{r\to z+0} a^r$, $r \in Q$. В частности, указанные пределы существуют для $x = 0$. Согласно определению предела функции в терминах последовательностей их значения равны соответственно значению последовательностей a^{r_n} при любых последовательностях $r_n < 0$ и $r_n > 0$, стремящихся к нулю, $r_n \in Q, n = 1, 2, \cdots$ Выбрав $r_n = -\frac{1}{n}$ и $r_n = \frac{1}{n}$, для которых пределы уже вычеслены, в силу сказанного получим

$$\lim_{r\to -0} a^r = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{-1}{n}} = 1, \lim_{r\to +0} a^r = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1, \tag{6}$$

т.е. односторонние пределы в точке $x = 0$ функции $a^r, r \in Q, r \neq 0$, равны и, следовательно, согласно теореме 2 п.6.6, существует двусторонний предел $\lim_{r\to 0, r\neq 0} a^r = 1$. Он совпадает со значением $a^0 = 1$ функции a^r при $r = 0$, а поэтому она непрерывна в нуле:

$$\lim_{r\to 0} a^r = a^0 = 1, r \in Q, a > 0.$$

Равенство (2) доказано. $\triangleleft$

Определение 1. . *Пусть $a > 0$ и $x \in R$. Определим a^x как предел a^r по множеству рациональных чисел Q, когда $r \to x$, т.е.*

$$a^x = \lim_{r \to x, r \in Q} a^r \tag{7}$$

Докажем, что это определение корректно, т.е. покажем, используя критерий Коши для предела функции, что предел(7) существует.

$\triangleright$ Пусть $a \geq 1$ и $x \in R$. В силу принципа Архимеда существует натуральное n такое, что

$$n > x. \tag{8}$$

Зададим произвольное $\epsilon > 0$. Согласно следствию леммы 1 существует такое $\delta > 0$, что для всех рациональных r, удовлетворяющих неравенству

$$|r| < \delta, \tag{9}$$

выполняется неравенство

$$|a^r - 1| < \frac{\epsilon}{a^n}. \tag{10}$$

Если это условие выполняется для некоторого $\delta > 0$, то оно заведомо выполняется и для всякого меньшего положительного δ. Поэтому указанное $\delta > 0$ можно всегда выбрать так, чтобы выполнялось неравенство (см. (8))

$$x + \frac{\delta}{2} < n. \tag{11}$$

Если рациональные числа r' b r'' принадлежат $\frac{\delta}{2}$ окрестности точки x:

$$|r' - x| < \frac{\delta}{2}, |r'' - x| < \frac{\delta}{2},$$

и, следовательно,

$$|r'' - r'| \leq |r'' - x| + |x - r'| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \tag{12}$$

то, заметив, что $r' < x + \frac{\delta}{2} < n$, будем иметь

$$|a^{r''} - a^{r'}| = a^{r'}|a^{r''-r'} - 1| < a^n|a^{r''-r'} - 1| < a^n\frac{\epsilon}{a^n} = \epsilon.$$

Таким образом, для произвольно заданного $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из выполнения условий $|r' - x| < \frac{\delta}{2}, |r'' - x| < \frac{\delta}{2}$ вытекает неравенство

$$|a^{r''} - a^{r'}| < \epsilon.$$

2.2 Задание 3

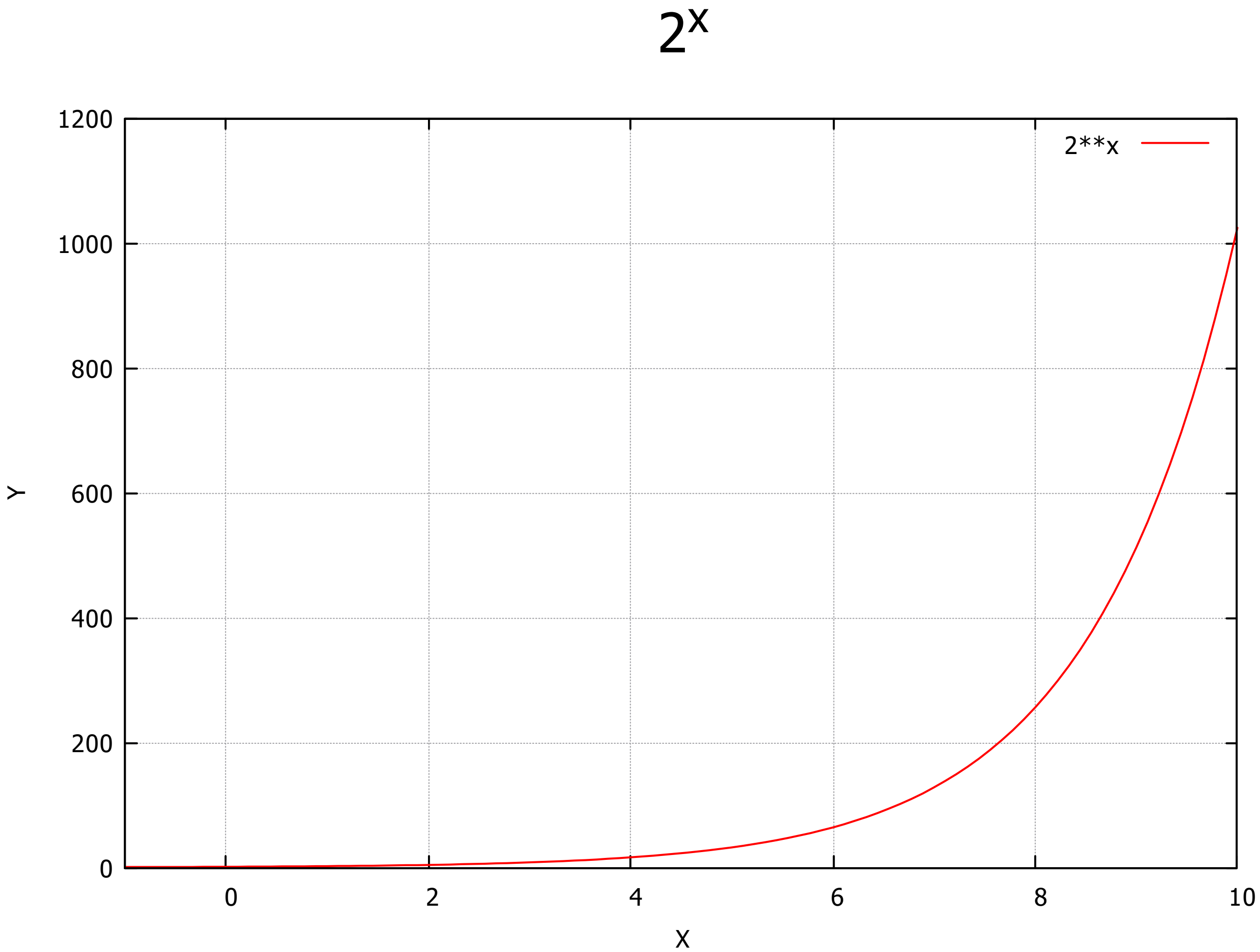

Рис. 1: Показательная функция числа 2.