Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Гудков Н. Д. группа 22103

подпись

Руководитель практики:
преподаватель И. В. Сосновский

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Петрозаводск – 2023

Содержание

1 Описание работы

1 задание было вводным. Я научился **форматировать текст и использовать математические формулы** $\sin x$.

Второе и третье задание поставило передо мной сложную задачу. Мне нужно было научиться создавать окружения для автоматической нумеровки формул.

$$1 = sin^2x + cos^x \tag{1}$$

Также я научился вставлять изображения, делать их обтекаемыми текстом. В целом пришлось искать много информации для решения проблем. Иногда я даже не знал, что мне надо искать! Выполняя вторую и третью лабораторные, я начал замечать использование LaTeX-а в интернете. Заходя на сайты с учебными пособиями по математике, при прогрузке сайты был виден код LaTeX-а.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

ГЛАВА 6
ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Тригонометрические ряды Фурье

Основные понятия. В этом параграфе будут изучаться ряды вида

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cosnx + b_n sinnx \tag{2}$$

$$a_n \in R, n = 0, 1, 2, ..., b_n \in R, n = 1, 2, ...,$$

называемые тригонометрическими рядами, т.е ряды, членами которых являются функции системы

$$1, cosx, sinx, ..., cosnx, sinnx, n = 1, 2, ... \tag{3}$$

(называемой тригонометрической системой или системой простых гармоник), умноженные на постоянные a_n, b_n, называемые коэффициентами тригонометрического ряда(51.1).

Лемма 1. Функции тригонометрической системы(51.2) имеют следующие свойства:

$$\int_{-\pi}^{\pi} cosnxcosmx\,dx \ = 0, m \neq n, m, n = 0, 1, 2, ...;$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} sinnxsinmx\,dx \ = 0, m \neq n, m, n = 0, 1, 2, ...;$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} cosnxsinmx\,dx \ = 0, m, n = 0, 1, 2, ...;$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} cos^2 nx\,dx \ = \int_{-\pi}^{\pi} sin^2 nx\,dx \ = \pi, n = 1, 2, ... \tag{4}$$

Действительно, например,

$$\int_{-\pi}^{\pi} cosnxcosmx\,dx \ = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [cos(n+m)x + cos(n-m)x]\,dx \ =$$

$$= \frac{sin(n+m)x}{2(n+m)}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{sin(n-m)x}{2(n-m)}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, n \neq m;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos^2 nx\,dx \ = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + 2cos2nx)\,dx \ = \pi + \frac{sin2nx}{4n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi, n = 1, 2, ...$$

Аналогично доказываются другие неравенства(51.3).

Прежде всего возникает вопрос, как найти коэффициенты тригонометрического ряда (51.1), если известна его сумма. Ответ на него легко дать, когда ряд (51.1) сходится равномерно на всей числовой оси.

Теорема 1. Если тригонометрический ряд (51.1) равномерно сходится на всей числовой оси и f - его сумма, т.е.

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n cosnx+b_n sinnx, \tag{5}$$

то

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx\,a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cosnx\,dx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)sinnx\,dx\,,n=1,2,... \tag{6}$$

Поскольку ряд, стоящий в правой части равенства (51.4), равномерно сходится, то его можно почленно интегрировать (теорема 8 из п. 31.4) на отрезке $[-\pi,\,\pi]$. Поэтому проинтегрирова обе части равенства (51.4), будем иметь

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx\;=\int_{-\pi}^{\pi}(a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n cosnx+b_n sinnx)\,dx\;=$$

$$=a_0\int_{-\pi}^{\pi}dx\;+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-\pi}^{\pi}cosnx\,dx\;+b_n\int_{-\pi}^{\pi}sinnx\,dx\;=2\pi a_0$$

Отсюда сразу следует первая формула (51.5).

Если обе части равенства (51.4) умножить на $cosmx$ или на $\sin mx$, $m\in N$, то, поскольку эти функции ограничены на числовой оси, в правой части будут снова стоять ряды, равномерно расходящиеся на всей числовой оси (см. замечание 3 в п. 31.2). Для доказательства оставшихся формул (51.5) достаточно проинтегрировать обе части каждого из получившихся равенств и воспользоваться формулами (51.3). Например,

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cosmx\,dx\;=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}(a_0 cosmx+\sum_{n=1}^{\infty}a_n cosnxcosmx+b_n sinnxcosmx)\,dx\;=$$

$$=a_0\int_{-\pi}^{\pi}cosmx\,dx\;+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-\pi}^{\pi}cosnxcosmx\,dx\,+$$

$$+b_n\int_{-\pi}^{\pi}sinnxcosmx\,dx\;=\pi a_m$$

Отсюда $a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)cosmx\,dx$.

Замечание 1. Напомним (см. п. 29.5), что функция f называется абсолютно интегрируемой на некотором конечном или бесконечном промежутке с концами ab, $-\infty \le a < b \le +\infty$, если существует конечное число точек $x_j, j = 0, 1, \ldots, k$, расширенной числовой прямой $\overline{R}$ таких, что:

1)$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_j < \ldots < x_k = b$;
2)функция f интегрируема по Риману на любом отрезке $[\xi; \eta] \subset$
$\subset (x_{j-1}, x_j), j = 1, 2, \ldots, k$;
3)интегралы $\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx$ абсолютно сходятся, $j = 1, 2, \ldots, k$.

При выполнении этих условий

$$\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^{k} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx \tag{7}$$

Всякое множество $x_0, x_1, \ldots, x_k$ указанных точек называется *правильным разбиением* промежутка интегрирования абсолютно интегрируемой функции f. Отметим, что интеграл (51.6) не зависит от выбора правильного разбиения промежутка интегрирования.

Замечание 2. Если функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi; \pi]$, то из неравенств $|f(x)cosnx| \le |f(x)|$, $|f(x)sinnx| \le |f(x)|$ следует, что интегралы

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnx\,dx \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sinnx\,dx\, n = 1, 2, \ldots,$$

также абсолютно (см. замечание из п. 29.5), а следовательно, и просто сходятся. Таким образом, формулы (51.5) имеют смысл для любой абсолютно интегрируемой на отрезке $[-\pi; \pi]$ функции.

Определение 1. Если функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi; \pi]$, то тригонометрический ряд (51.1), коэффициенты которого заданы формулами (51.5), называется *тригонометрическим рядом Фурье* (или, короче, *рядом Фурье*) *функции* f, его коэффициенты (51.5) - коэффициентами Фурье функции f (по тригонометрической системе функций (51.2)), а частичные суммы порядка n ряда Фурье - суммами Фурье порядка n функции f.

Если ряд (50.1) является рядом Фурье функции f, то пишут

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cosnx + b_n sinnx$$

Используя введенные термины, теорему 1 можно перефразировать следующим образом.

Теорема 1. *Равномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы.*

Замечание 3. Если у интегрируемой (в собственном или не собственном смысле) функции изменить ее значения на конечном множестве точек, то она останется интегрируемой, и значение интеграла от нее по указанному промежутку не изменится. Поэтому две абсолютно интегрируемые на отрезке $[-\pi;\pi]$ функции, отличающиеся друг от друга лишь на конечном множестве точек, имеют одинаковые ряды Фурье.

Замечание 4. Напомним ещё, что число $T > 0$ называется периодом функции f, если для любого числа x, принадлежащего области определения $X \subset R$ функции f, числа $x + T$ и $x - T$ также принадлежат X и для всякого $x \in X$ выполняется условие $f(x + T) = f(x)$. Функция, имеющая период T, называется T-периодической.

Если функция f определена, например, на отрезке $[-\pi;\pi]$, то при $f(-\pi) \neq f(\pi)$ ее нельзя продолжить на всю числовую ось так, чтобы получилась 2π-периодическая функция, а ее сужение на полинтервале $[-\pi,\pi)$ можно продолжить указанным образом: следует положить

$$f^*(x + 2\pi k) \stackrel{def}{=} f(x), x \in [-\pi;\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Функция f^*, очевидно 2π-периодическая и на отрезке $[-\pi,\pi)$ отличается от функции f, быть может, только в одной точке $x = \pi$. Поэтому функция f и функция f^*, рассматриваемая только на отрезке $[-\pi,\pi)$, имеют один и тот же ряд Фурье.

Замечание 5. Если функция f является T-периодической, интегрируемой на отркезке $[0,T]$ (в собственном или не собственном смысле), то для любого числа a имеет место равенство (рис. 1)

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$$

В частности, для коэффициентов Фурье 2π-периодической функции, абсолютно интегрируемой на отрезке $[-\pi,\pi]$, справедливы формулы

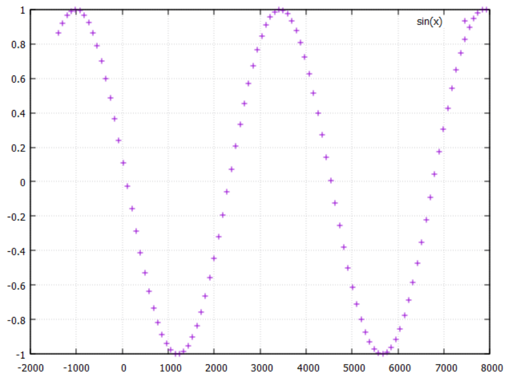

Рис. 1:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx\ ,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) cosnx\,dx\ , b_n = \frac{1}{\pi} f(x) sinnx\,dx\ , n = 1, 2, \ldots$$

2.2 Задание 3

Замечание 4. Напомним ещё, что число $T > 0$ называется периодом функции f, если для любого числа x, принадлежащего области определения $X \subset R$ функции f, числа $x + T$ и $x - T$ также принадлежат X и для всякого $x \in X$ выполняется условие $f(x + T) = f(x)$. Функция, имеющая период T, называется T-периодической.

Если функция f определена, например, на отрезке $[-\pi; \pi]$, то при $f(-\pi) \neq f(\pi)$ ее нельзя продолжить на всю числовую ось так, чтобы получилась 2π-периодическая функция, а ее сужение на полинтервале $[-\pi, \pi)$ можно продолжить указанным образом: следует положить

$$f^*(x + 2\pi k) \overset{def}{=} f(x), x \in [-\pi; \pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Функция f^*, очевидно 2π-периодическая и на отрезке $[-\pi, \pi)$ отличается от функции f, быть может, только в одной точке $x = \pi$. Поэтому функция f и функция f^*, рассматриваемая только на отрезке $[-\pi, \pi)$, имеют один и тот же ряд Фурье.

Замечание 5. Если функция f является T-периодической, интегрируемой на отркезке $[0, T]$ (в собственном или не собственном смысле), то для любого числа a имеет место равенство (рис. 1)

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx \; = \int_0^T f(x)\,dx$$

В частности, для коэффициентов Фурье 2π-периодической функции, абсолютно интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$, справедливы формулы

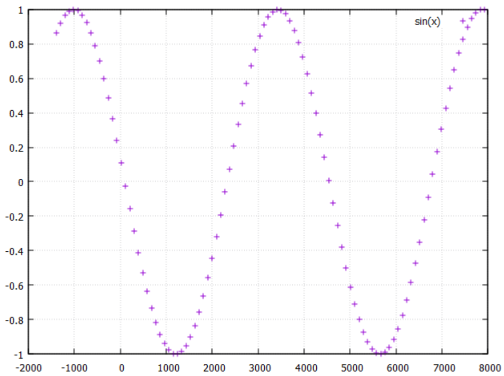

Рис. 2:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx \ ,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) cosnx\,dx \ , b_n = \frac{1}{\pi} f(x) sinnx\,dx \ , n = 1, 2, \dots$$