

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ «ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Ершов А.А группа 22101

подпись

Руководитель практики:
Богоявленская Ольга Юрьевна:

подпись

Итоговая оценка:

подпись

Содержание

1	Описание работы	3
2	Результаты работы	3
2.1	Задание 2	3
2.2	Задание 3	6

1 Описание работы

На протяжении второго семестра во время прохождения практики по дисциплине "Компьютерные технологии в информатике" были получены различные навыки.

Второе задание представляло собой верстку документа. Во время его выполнения была освоена программа L^AT_EX: набор математических формул, рубрикация текста и т.д. Данная программа является высококачественной системой набора сложных текстов с различными математическими формулами.

Во время выполнения третьего задания был освоен интерпретатор команд gnuplot. Данная программа позволяет создавать различные двух- или трех- мерные графики. Также во время выполнения задания 3 нужно научиться с помощью специального окружения вставлять отрисованные графики в документ.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Как и для точки, окрестностью множества называется всякое содержащее его открытое множество.

Аналогично одномерному случаю для всякого множества $X \subset R^n$ вводятся понятия его точек прикосновения, предельных и изолированных точек (см. п. 6.1 и п. 6.9).

Определение 1 Точка пространства (конечная или бесконечно удаленная) называется точкой прикосновения множества, если любая ее окрестность содержит точки этого множества.

Точки самого множества являются, очевидно, его точками прикосновения, так как любая окрестность точки множества содержит саму эту точку. Точки прикосновения могут и не принадлежать самому множеству. Например, точки $x = 0$ и $x = 1$ являются точками прикосновения интервала $X = (0, 1)$ и не принадлежат ему.

Если точка $x^{(0)}$ является конечной точкой прикосновения множества $X \subset R^n$, то любая ее окрестность (в частности, сферическая окрестность $U(x^{(0)}; \frac{1}{m})$) содержит точку этого множества, обозначим ее $x^{(m)}$:

$$x^{(m)} \in U\left(x^{(0)}; \frac{1}{m}\right) \cap X, \quad m = 1, 2, \dots$$

Тогда $\rho(x^{(m)}, x^{(0)}) < \frac{1}{m}$ и, следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x^{(0)}$$

т. е. всякая конечная точка прикосновения множества является пределом последовательности его точек.

Ясно, что справедливо и обратное утверждение: если точка пространства является пределом последовательности точек множества, то она - его точка прикосновения, так как любая ее окрестность содержит все точки указанной последовательности, начиная с некоторого номера, т. е. содержит точки множества.

Аналогично, бесконечно удаленная точка ∞ является точкой прикосновения множества $X \subset R^n$ тогда и только тогда, когда существует такая последовательность точек $x^{(m)} \in X, m = 1, 2, \dots$, что $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = \infty$

Действительно, если ∞ - точка прикосновения множества X , то в любой ее окрестности $U\left(\infty; \frac{1}{m}\right)$ содержится точка этого множества, обозначим ее $x^{(m)}$, т. е. $x^{(m)} \in U\left(\infty; \frac{1}{m}\right) \cap X$. Тогда $\rho(x^{(m)}, 0) > m$, где $m = 1, 2, \dots$. Отсюда следует, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x^{(m)}, 0) = \infty$, а это означает, что $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = \infty$.

Наоборот, если существует такая последовательность $x^{(m)} \in X$, $m = 1, 2, \dots$, что $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = \infty$, то в любой окрестности бесконечно удаленной точки содержатся все члены этой последовательности, начиная с некоторого номера, т. е. содержатся точки множества X . Отметим еще, что условие существования в множестве $X \subset R^n$ последовательности точек, стремящейся к бесконечности ∞ , равносильно, как в этом легко убедиться, неограниченности этого множества.

Поэтому бесконечно удаленная точка является точкой прикосновения множества в том и только том случае, когда оно неограниченно.

Определение 2 Точка x (конечная или бесконечно удаленная) называется предельной точкой некоторого множества, если в любой ее окрестности содержится точка этого множества, отличная от нее самой.

С помощью понятия проколотой окрестности это определение можно перефразировать следующим образом: точка x называется предельной точкой множества X , если любая ее проколотая окрестность содержит по крайней мере одну точку этого множества.

Очевидно, что предельная точка некоторого множества является и его точкой прикосновения.

Если точка x является предельной точкой множества X , то, выбрав в каждой окрестности $U(x; 1/m)$ точку из множества X , отличную от x , и обозначив ее $x^{(m)}$, получим такую последовательность $x^{(m)} \in X$, $m = 1, 2, \dots$, что $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)} = x$ и $x^{(m)} \neq x, m = 1, 2, \dots$, т. е. если x - предельная точка множества, то существует последовательность точек этого множества, сходящаяся к x , у которой ни одна из ее точек не совпадает с точкой x .

Определение 3 Если у точки множества существует окрестность, не содержащая никаких других его точек, кроме нее самой, то эта точка называется изолированной точкой этого множества.

Как и в одномерном случае (п. 6.9.), каждая точка прикосновения множества является либо его изолированной точкой, либо предельной.

Определение 4 Совокупность всех конечных точек прикосновения множества называется его замыканием. Замыкание множества X обозначается \bar{X} .

Определение 5 Множество называется замкнутым, если оно содержит все свои конечные точки прикосновения.

Поскольку каждая точка множества является и точкой его прикосновения, т. е. $X \subset \bar{X}$, то замкнутость множества X означает, что

$$X = \bar{X} \quad (1)$$

Пустое множество считается по определению замкнутым.

Упражнение 3. Доказать что $diam \bar{X} = diam X$.

Примерами замкнутых множеств являются множества вида

$$Q^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : a_i \leq x_i \leq a_i + h, i = 1, 2, \dots, n\} \quad (2)$$

где $h > 0, a_i \in R, i = 1, 2, \dots, n$, называемые замкнутыми n -мерными кубами с ребрами длины h , параллельными координатным осям. Эти кубы являются замыканиями кубов

$$F^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : a_i < x_i < a_i + h, i = 1, 2, \dots, n\}$$

называемых также открытыми кубами (они являются открытыми множествами):

$$Q^n = \overline{F^n}$$

Лемма 1 *Замыкание всякого множества является замкнутым множеством.*

▷ Если X - некоторое множество, x - точка прикосновения его замыкания \bar{X} и $U = U(x)$ - ее произвольная окрестность, то согласно определению точки прикосновения в этой окрестности имеется точка $y \in \bar{X}$. Поскольку U - открытое множество, то оно является и окрестностью точки y , а так как включение $y \in \bar{X}$ означает, что точка y является точкой прикосновения множества X , то в множестве U имеется точка множества X . Таким образом, в любой окрестности U точки x имеются точки множества X , а это означает, что $x \in \bar{X}$, т. е. \bar{X} содержит все свои точки прикосновения. ◁

Для всякого множества $X \in R^n$ множество $R^n \setminus X$ называется его дополнением в пространстве R^n . Оказывается, что открытые множества (будем их обозначать буквой G) и замкнутые множества (их будем обозначать F) являются дополнениями друг друга в пространстве R^n .

Лемма 2 *Дополнение открытого множества является замкнутым, а дополнение замкнутого множества - открытым множеством.*

▷ Пусть F - замкнутое множество и $G = R^n \setminus F$. Если $x \in G$, то $x \notin F$, и, следовательно, точка x не является точкой прикосновения множества F . Поэтому существует окрестность $U(x)$ точки x , не содержащая точек множества F , т. е. содержащаяся в G . Таким образом, любая точка множества G является внутренней, а это означает, что G - открытое множество.

Пусть G - открытое множество, $F = R^n \setminus G$ и $x \in G$. Поскольку G - открытое множество, то оно является окрестностью точки x , причем, являясь дополнением множества F , оно не содержит его точек. Следовательно, никакая точка $x \in G$ не является точкой прикосновения множества F . Иначе говоря, все точки прикосновения множества F содержатся в нем самом, а это означает, что F замкнутое множество. ◁

2.2 Задание 3

Рис. 1: Функция $\cos(x)$

