Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнила:
Дехтярёва А. В. группа #22103

____
подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2023

Содержание

1 Описание работы

Я успешно завершила две задачи. Во втором задании я создала документ с математическим текстом, предоставленным инструктором, используя LaTeX. Я добавила разделы и автоматическую нумерацию формул, а также создала новые окружения для примеров, определений и других математических объектов. В третьей задаче я построила кривую в декартовых координатах, используя интерпретатор команд gnuplot, и добавила это изображение в документ, который я создала во втором задании. В процессе работы я изучала скринкасты и использовала учебники из предложенной литературы. Результаты моей работы, я представила ниже.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Пример 1 *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2}$ *сходится, ибо*

$$0 \leq \frac{sin^2 na}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, n = 1, 2, \cdots ,$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *сходится.*

Пример 2 *. Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ *расходится, ибо*

$$\frac{1}{1+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *расходится.*

Теорема 1 *Признак Даламбера. Пусть для ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n > 0, n = 1, 2, \cdots , \tag{1}$$

существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = 1. \tag{2}$$

Тогда если l < 1, то ряд (1) сходится, а если l > 1, то рассходится.

$\triangleright$ Пусть сначала l < 1. Выберем число q так чтобы l < q < 1. Тогда в силу условия (2) существует такой номер $n_0 > l$, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\frac{u_n}{u_n n-1} < q$ и, следовательно, неравенство $u_n < qu_{n-1}$. Применяя это неравенство последовательно для, $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \cdots$, получим

$$\begin{aligned}
&u_{n_0+1} < qu_{n_0},\\
&u_{n_0+2} < qu_{n_0+1} < q^2 u_{n_0},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_{n_0+k} < q^k u_{n_0},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Но ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k u_{n_0} = u_n \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ в силу условия $0 < \mathrm{q} < 1$ сходится, поэтому, согласно признаку сравнения, сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} un_0 + k$, а следовательно, и ряд (1).

Пусть теперь $\mathrm{l} > 1$; тогда в силу условия (2) существует такой номер n_0 что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\frac{u_n}{u_{n-1}} > 1$, а поэтому и неравенство $u_n > u_{n-1}$. Применяя его последовательно для $n = n_0 + 1, n_0 = 2, \cdots$ получим

$$u_{n+1} > u_n > \cdots > u_{n_0+1} > u_{n_0} > 0.$$

Поэтому последовательность членов ряда (1) не стремится к нулю, откуда и следует его расходность. ◃

Теорема 2 *Признак Коши Пусть для ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \geq 0, \tag{3}$$

существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l. \tag{4}$$

Тогда если $l < 1$,то ряд (3) сходится, а если $l > 1$, то расходится.

▹ Пусть сначала $l < 1$. Выберем число q так, чтобы $l < q < 1$. Тогда в силу условия (4) существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\sqrt[3]{u_n} < q$ и, следовательно, $u_n < q^n$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится, то сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{n_0+k}$, а поэтому и ряд (3).

Если $l > 1$,то в силу условия существует такой номер n_0, что при $n > n_0$ выполняется неравенство $\sqrt[3]{u_n} > l<$ т.е. $u_n > l$, и, следовательно, последовательность членов ряда (3) не стремится к нулю, поэтому этот ряд расходится. ◃

Пример 3 . *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ сходится. Это устанавливается, например, с помощью признака Даламбера:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n!}{1/(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Пример 4 . *Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ сходится. Это сразу можно установить с помощью признака Коши:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Пример 5 . *Для ряда с общим членом $u_n = \frac{1}{n^\alpha}, \alpha > 0$, имеем*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = (\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1})^\alpha = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = \frac{1}{(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^\alpha} = 1$$

(см.пример 3 в п. 13.2). Таким образом, при применении признаков Даламбера и Коши соответствующие пределы равны единице, т.е. при помощи этих признаков нельзя определить, сходятся или расходятся рассматриваемые ряды. Среди них есть как сходящиеся при $\alpha > 1$, так и расходящиеся при $\alpha \leq 1$. Иначе говоря, среди рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ с неотрицательными числами, для которых $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n+1}{u_n} = 1$, соответствено $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$, имеются как сходящиеся (например, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$), так и расходящиеся (например, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$) ряды.

30.5. Знакочередующиеся ряды.

Теорема 3 *Лейбниц. Если последовательность* $\{u_n\}$ *убывает и стремится к нулю, т.е.*

$$u_n \geq u_{n+1}, n = 1, 2, \cdots, \lim_{n\to\infty} u_n = 0, \tag{5}$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \tag{6}$$

сходится, причем, если $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n, s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} u_k$ *то при любом* $n = 1, 2, \cdots$ *выполняется неравенство*

$$|s_n - s| \leq u_{n+1}. \tag{7}$$

Прежде всего отметим, что из условия (5) следует, что

$$u_n \geq 0 \tag{8}$$

в силу чего члены ряда (6) поочередно то ≥ 0 то ≤ 0.

Ряды вида (6) при $u_n > 0$ называются *знакочередующимися.*

$\triangleright$ Частичные суммы с четными номерами ряда (6) возрастают и неотрицательны. В самом деле,

$$\begin{aligned} s_{2n+2} &= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n+1} - u_{2n+2}) = \\ &= s_{2n} + (u_{2n+1} - u_{2n+2}) \geq s_{2n} \geq 0, n = 2, 3, \cdots, \end{aligned}$$

2.2 Задание 3

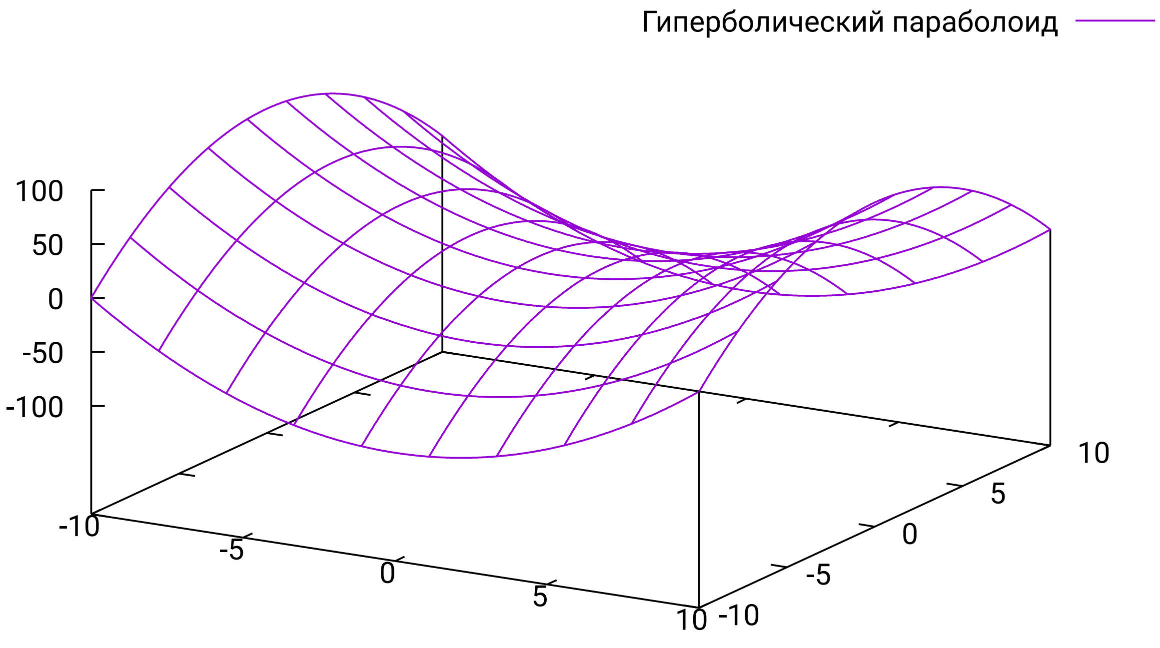

Рис. 1: Гиперболический параболоид.