Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Бондар Г. А. группа #22103

____
подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2023

Содержание

1 Описание работы

В рамках курса: “Учебная практика: компьютерные тенологии в математике”, мы:

1. *Освоили инструменты набора и трансдяции математических текстов с помощью издательской системы LaTeX.*

2. *Овладели инструментами построения научных графиков с помощью системы Gnuplot.*

Задание номер 2 представляло собой набор текста из учебника по Математичекмоу Анализу Кудрявцева Л. Д.. Во время выполнения задания мы обращались к пакетам различным пакетам LaTeX, например *amsmath*. При наборе текста учебника нам повстречались различные *формулы, интегралы и логорифмы*, а также такая структура данных как *список*. Мы содавали отдельное окружение для *параграфов и теорем*.

Задание номер 3 представляло собой построение научного графика с помощью системы Gnuplot и вставка его в документ со вторым заданием. График был испортирован с формате: *.pdf* и внесён в документ второго задания с помощью окружения: *figure*.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

и ограничена на полуинтервале $[a, b)$, то интеграл $\int_a^b f(x)g(x)dx$ также абсолютно сходится.

В самом деле, произведение интегрируемых по Риману функций также интегрируемо по Риману (свойство 5 в п. 24.1), поэтому функция $f(x)g(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a, \eta] \subset [a, b)$, и, следовательно, можно говорить о несобственном интеграле $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$.

Из ограниченности функции $g(x)$ следует, что существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in [a, b)$ выполняется неравенство $|g(x)| \leqslant c$, а поэтому и неравенство $|f(x)g(x)| \leqslant c|f(x)|$, из которого явствует, что сходимость интеграла $\int\limits_a^b |f(x)g(x)|dx$ вытекает, согласно признаку сравнения для сходимости интегралов от неотрицательных функций, из сходимости интеграла $\int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Определение абсолютно сходящегося интеграла естественным образом обобщается на несобственный интеграл общего вида, определяемый с помощью правильных разбиений промежутка интегрирования (см. п. 29.1), и для него остаются верными аналоги теорем, доказанных выше в этом пункте для абсолютно сходящихся интегралов специального вида (определение 1, п. 29.1).

2.1.1 Признаки сходимости Дирихле и Абеля.

Теорема 1 (признак Дихле). *Если на полуоси $x \geqslant a$:*

1. *функция f непрерывна и имеет ограниченную первообразную;*

2. *функция g непрерывно дифференцируема и убывает, стремясь нулю при $x \to +\infty$, т. е. $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$*

то интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \tag{1}$$

сходится.

$\triangleright$ *Пусть F - ограниченная первообразная функции f на полуоси $x \geqslant a, F'(x) = f(x)$. По условию функция f непрерывна, поэтому функция F непрерывно дифференцируема. Проинтегрируем по частям интеграл $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx, a < b < +\infty$:*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)dF(x) = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g'(x)dx. \qquad (2)$$

Поскольку по условию функция F ограничена на полуоси $x \geqslant a$, то существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \geqslant a$ выполняется неравенство

$$|F(x)| \leqslant c \qquad (3)$$

и, следовательно, $|F(b)g(b)| \leqslant c|g(b)|$. В силу стремления к нулю функции g при $x \to +\infty$ отсюда получаем

$$\lim_{b\to+\infty} F(b)g(b) = 0. \qquad (4)$$

Докажем теперь, что интеграл $\int\limits_a^b F(x)g'(x)dx$, стоящий в правой части равенства (2), абсолютно сходится. Из убывания функции $g(x)$ (второе условие теоремы) вытекает, что $g'(x) \leqslant 0$ при $x \geqslant a$, т. е.

$$|g'(x)| = -g'(x) \qquad (5)$$

Далее, из того, что функция g при $x \geqslant a$, убывая, стремится к нулю, когда $x \to +\infty$, следует, что $g(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant a$, в частности,

$$g(b) \geqslant 0 \qquad (6)$$

В результате

$$\int\limits_a^b |F(x)g'(x)|\,dx \underset{(29.45)}{=} -\int\limits_a^b |F(x)|g'(x)dx \underset{(29.43)}{\leqslant} -c\int\limits_a^b g'(x)dx =$$

$$= c[g(a) - g(b)] \underset{(29.46)}{\leqslant} cg(a)$$

Таким образом, множество интегралов $\int_a^b |F(x)g'(x)|\,dx$ при всех $b \geqslant a$ ограничено сверху, а это, согласно лемме п. 29.3, и означает сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} |F(x)g'(x)|\,dx$. Итак, интеграл $\int_a^{+\infty} F(x)g'(x)dx$ абсолютно, а следовательно, и просто сходится, т. е. существует конечньй предел

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b F(x)g'(x)dx = \int_a^{+\infty} F(x)g'(x)dx \qquad (7)$$

В силу выполнения условий (4) и (7) из равенства (2) следует существование конечного предела

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = -F(a)g(a) - \int\limits_a^{+\infty} F(x)g'(x)dx$$

что и означает сходимость интеграла (1). $\triangleleft$

Теорема 2 (признак Абеля). *Если на полуоси $x \geqslant a$:*

1. *Функкия f непрерьвна и интеграл*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{8}$$

2. функиия g непрерывно дифференцируема, ограничена и монотонна;

то интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

сходится.

$\triangleright$ *Покажем, что эта теорема вытекает из предыдущей. Прежде всего отметим, что интегралы*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ и } \int_a^{+\infty} f(x)[-g(x)]dx$$

сходятся или расходятся одновременно и что в силу монотонности функции g одна из функций g или $-g$ убывает. Пусть для определенности убывает функция g. В силу ее ограниченности и монотонности существует конечный предел

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = c$$

а так каю функция g убывает, то, убывая, стремится к нулю и разность $g(x) - c$ при $x \to +\infty$.

Представим произведение $f(x)g(x)$ в виде

$$f(x)g(x) = f(x)[g(x) - c] + cf(x) \tag{9}$$

В силу первого условия теоремы интеграл $\int_a^{+\infty} cf(x)dx$ сходится. Из этого же условия следует, что интеграл $F(x)^a = \int\limits_a^x f(t)dt, x \geqslant a$, ограничен. В самом деле, из существования конечного предела $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ следует ограниченность функции F в некоторой окрестности $U(+\infty) = \{x : x > b\}$ бесконечно удаленной точки $+\infty$ (свойство 1° из п. 6.7). На отрезке же $[a, b]$ функция F ограничена, ибо она непрерывна. В результате функция F ограничена на всей полупрямой $x \geqslant a$. Функция F является первообразной функции f, тем самым функция f имеет ограниченную первообразную при $x \geqslant a$.

Таким образом, для интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)[g(x) - c]dx$ выполнены все условия признака Дирихле, и потому этот интеграл сходится. В силу доказанного из равенства (9) следует сходимость интеграла

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx. \triangleleft$$

2.2 Задание 3

2.2.1 График функции: Парабола

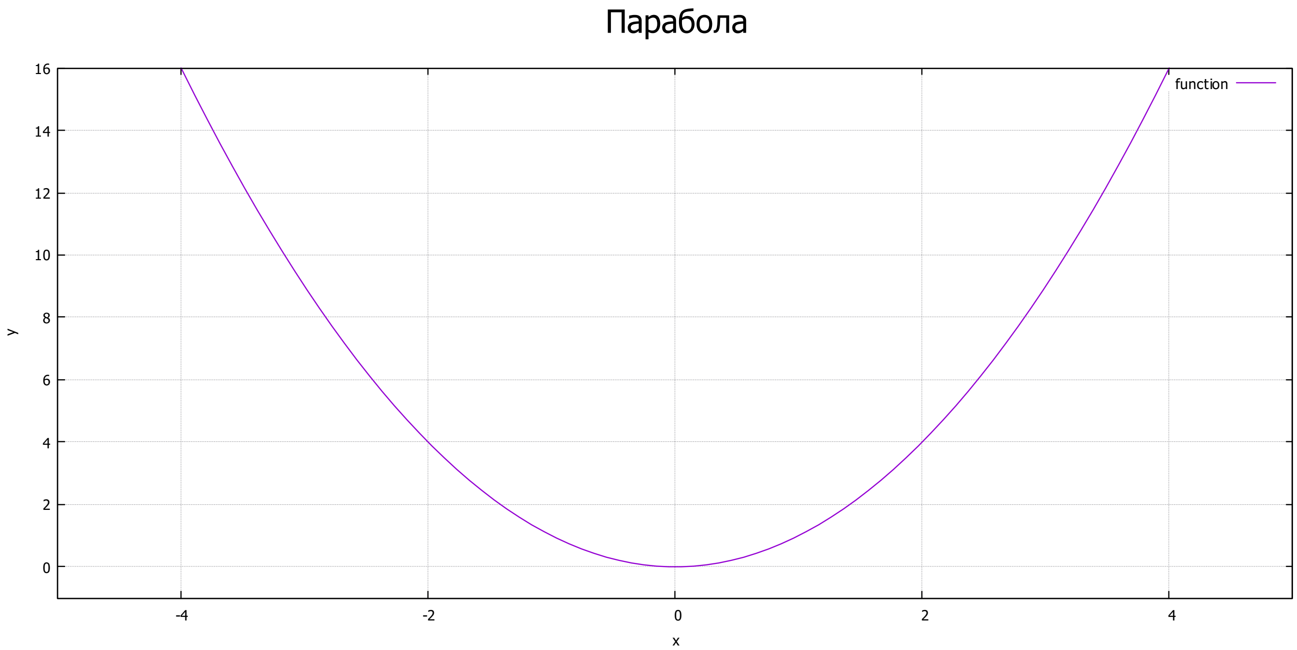

Рис. 1: График Параболы