Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Боголепов И. А. группа #22104

____
подпись

Руководитель практики:
Преподаватель Сосновский И. В.

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2023

Содержание

1 Описание работы

Во втором семестре я познакомился с такой программой как LaTex, которая помогает в написании математических формул, центрировании их, автонумерации, расстановке переносов и отступов. Первое задание было ознакомительным, выполняя его я узнал о правильной структуре документа и о специальных символах. Во второй работе было необходимо перенести целый параграф из книги, используя инстурменты программы. На ее выполение понадобилось чуть больше времени, чтобы сделать документ максимально приближенным к оригиналу, но результат стоил потраченного времени. Я изучал множество интернет-источников, смотрел скринкасты, представленные на сайте кафедры ИМО ПетрГУ, чтобы узнать, как оформить текст праивльно. В третьем задании я научился использовать программу Gnuplot для создания графиков функций и соотвественно их добавлению в документ. Я считаю, что LaTex очень удобная программа, хоть и требует некоторого мастерства.

В общем, я считаю, что изучение LaTex было очень полезным для меня, так как это очень важный инструмент для написания научных работ и документов, который используется во многих областях науки и техники. Я продолжаю изучать программу и надеюсь, что в будущем смогу использовать ее для написания своих научных работ и публикаций

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

В символической записи это условие выглядит следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall x \in X \quad \forall n > n_0 \quad \forall p \geq 0 : \left| f_{n+p}\left(x\right) - f_n\left(x\right) \right| \varepsilon. \tag{1}$$

$\triangleright$ 1. Пусть

$$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f.$$

Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Для него в силу (31.7) существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$\left| f_n\left(x\right) - f\left(x\right) \right| < \varepsilon/2$$

Поэтому для всех точек $x \in X$, всех номеров $n > n_0$ и всех $p = 0, 1, 2, ...$ имеем

$$\left| f_{n+p}\left(x\right) - f_n \right| = \left| \left[f_{n+p}\left(x\right) - f\left(x\right) \right] + \left[f\left(x\right) - f_n\left(x\right) \right] \right| \leq$$
$$\leq \left| f_{n+p}\left(x\right) - f\left(x\right) \right| + \left| f_n\left(x\right) - f\left(x\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. выполняется условие (12)

2. Пусть выполняется условие (12); тогда в каждой точке $x \in X$ последовательность $\left\{ f_n\left(X\right) \right\}$ удовлетворяет критерию Коши сходимости числовых последовательностей и, следовательно, сходится. Обозначим предел последовательности $\{f_n\}$ на множестве X через f:

$$f\left(x\right) = \lim_{x \to \infty} f_n\left(x\right), \quad x \in X \tag{2}$$

Перейдя к пределу в последнем неравнестве (12) при $p \to \infty$, в силу (13) получим, что для всех номеров $n > n_0$ и всех точек $x \in X$ выполняется неравенство $\left| f\left(x\right) - f_n\left(x\right) \right| \leq \varepsilon$.

Это и означает равномерную сходимость последовательности функций $\{f_n\}$ к функции f на множестве X. $\triangleleft$

О п р е д е л е н и е 2. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\left(x\right), \quad x \in X \tag{3}$$

называется *равномерно сходящимся на множестве* x, если на x равномерно сходится последовательность его частичных сумм.

Очевидно, что ряд, равномерно сходящийся на множестве X, сходится на этом множестве. Пусть

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

и $r_n(x) = s(x) - s_n(x) = \sum\limits_{k=n+1} u_k(x)$ – остаток ряда. Равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ согласно определению означает, что

$$s_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} s(x). \tag{4}$$

Это условие равносильно условие

$$s(x) - s_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0. \tag{5}$$

Иначе говоря, равномерная сходимость ряда на множестве X означает равномерную сходимость на X к нулю последовательности его остатков. Отсюда в силу леммы получаем, что для того чтобы ряд (31.12) равномерно сходился на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \sup_X |r_n(x)| = 0. \tag{6}$$

З а м е ч а н и е 2. Если какие-то ряды равномерно сходятся на некотором множестве, то и любая их конченая линейная комбинация равномерно сходится на этом множестве (см. замечание 1).

Т е о р е м а 2. (необходимое условие равномерной сходимости ряда).*Если ряд* (14) *равномерно сходится на множестве* X, *то поледовательность его членов равномерно стремится к нулю на этом множестве.* $\triangleright$ В самом деле,

$$u_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x), \quad n = 2, 3, ... \tag{7}$$

В случае равномерной сходимости на множестве X ряда (14) последовательности $\{s_n(x)\}$ и $\{s_{n-1}(x)\}$ его частичных сумм равномерно стремятся на X к его сумме $s(x)$:

$$s_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} s(x), \quad s_{n-1}(x) \underset{X}{\rightrightarrows} s(x),$$

поэтому

$$s_n(x) - s_{n-1}(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0,$$

а это в силу (18) и означает, что

$$u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0. \triangleleft \tag{8}$$

Отметим, что согласно лемме 1 для того, чтобы было выполнено условие (19), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{n\to\infty} \sup_X |u_n(x))| = 0. \tag{9}$$

Т е о р е м а 3 (критерий Коши равномерной сходимости ряда). *Для того чтобы ряд* (14) *равномерно сходился на множестве* X *, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* n_0, *что для всех* n_0, *всех* $p = 0, 1, 2, ...$ *и всех* $x \in X$ *выполнялось неравенство*

$$|u_n(x) + u_{n+1}(x) + ... + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

$\triangleright$ В силу равенства

$$u_n(x) + u_{n+1}(x) + ... + u_{n+p}(x) = s_{n+p}(x) - s_{n-1}(x),$$

где $s_n(x)$ – частичные суммы рассматриваемого ряда, критерий Коши равномерной сходимости рядов сразу следует из критерия Коши равномерной сходимости последовательностей $\triangleleft$

З а м е ч а н и е 3. В дальнейшем нам понадобится следующее простое свойство равномерно сходящихся рядов.

Если ряд 14 *равномерно сходится на множестве* X*, а функция* f *ограничена на этом множестве, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x)u_n(x)$ *также равномерно сходится на* X $\triangleright$ Действительно, ограниченность функции f означает, что существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \le c$. Поэтому для любых целых $n \ge 1?p \ge 0$ и любой точки $x \in X$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned}
&|f(x)u_n(x) + f(x)u_{n+1}(x) + ... + f(x)u_{n+p}(x)| = \\
&\qquad = |f(x)|\,|u_n(x) + u_{n+1}(x) + ... + u_{n+p}(x)| \le \\
&\qquad\qquad \le c\,|u_n(x) + u_{n+1}(x) + ... + u_{n+p}(x)|\,.
\end{aligned}$$

Из этого неравенства следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x)u_n(x)$ удовлетворяет на множестве X критерию Коши равномерной сходимости ряда, ибо этому критерию удовлетворяет исходный ряд (14). $\triangleleft$

Т е о р е м а 4 (признак Вейерштрасса). *Если числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \ge 0, \tag{10}$$

сходится и для всех $x \in X$ *и для всех* $n = 1, 2, ...$ *выполняется неравенство*

$$|u_n(x)| \le a_n, \tag{11}$$

то ряд 14 *абсолютно и равномерно сходится на множестве* X.

$\triangleright$ Абсолютная сходимость ряда (14) в каждой точке x множества X следует, согласно признаку сравнения (теорема 6 в п. 30.4), из неравенства (22) и сходимости ряда (21).В символической записи это условие выглядит следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall x \in X \quad \forall n > n_0 \quad \forall p \ge 0 : |f_{n+p}(x) - f_n(x)|\, \varepsilon. \tag{12}$$

$\triangleright$ 1. Пусть

$$f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f.$$

Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Для него в силу (31.7) существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$$

Поэтому для всех точек $x \in X$, всех номеров $n > n_0$ и всех $p = 0, 1, 2, ...$ имеем

$$\begin{aligned}
&|f_{n+p}(x) - f_n| = |[f_{n+p}(x) - f(x)] + [f(x) - f_n(x)]| \le \\
&\qquad \le |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

т. е. выполняется условие (12)

2. Пусть выполняется условие (12); тогда в каждой точке $x \in X$ последовательность $\{f_n(X)\}$ удовлетворяет критерию Коши сходимости числовых последовательностей и, следовательно, сходится. Обозначим предел последовательности $\{f_n\}$ на множестве X через f:

$$f(x) = \lim_{x \to \infty} f_n(x)\,, \quad x \in X \tag{13}$$

Перейдя к пределу в последнем неравнестве (12) при $p \to \infty$, в силу (13) получим, что для всех номеров $n > n_0$ и всех точек $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$.

Это и означает равномерную сходимость последовательности функций $\{f_n\}$ к функции f на множестве X. $\lhd$

О п р е д е л е н и е 2. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in X \tag{14}$$

называется *равномерно сходящимся на множестве* x, если на x равномерно сходится последовательность его частичных сумм.

Очевидно, что ряд, равномерно сходящийся на множестве X, сходится на этом множестве. Пусть

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

и $r_n(x) = s(x) - s_n(x) = \sum\limits_{k=n+1} u_k(x)$ – остаток ряда. Равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ согласно определению означает, что

$$s_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} s(x). \tag{15}$$

Это условие равносильно условие

$$s(x) - s_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0. \tag{16}$$

Иначе говоря, равномерная сходимость ряда на множестве X означает равномерную сходимость на X к нулю последовательности его остатков. Отсюда в силу леммы получаем, что для того чтобы ряд (31.12) равномерно сходился на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \to \infty} \sup_X |r_n(x)| = 0. \tag{17}$$

З а м е ч а н и е 2. Если какие-то ряды равномерно сходятся на некотором множестве, то и любая их конченая линейная комбинация равномерно сходится на этом множестве (см. замечание 1).

Т е о р е м а 2. (необходимое условие равномерной сходимости ряда).*Если ряд* (14) *равномерно сходится на множестве* X*, то поледовательность его членов равномерно стремится к нулю на этом множестве.* $\rhd$ В самом деле,

$$u_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x), \quad n = 2, 3, ... \tag{18}$$

В случае равномерной сходимости на множестве X ряда (14) последовательности $\{s_n(x)\}$ и $\{s_{n-1}(x)\}$ его частичных сумм равномерно стремятся на X к его сумме $s(x)$:

$$s_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} s(x), \quad s_{n-1}(x) \underset{X}{\rightrightarrows} s(x),$$

поэтому

$$s_n(x) - s_{n-1}(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0,$$

а это в силу (18) и означает, что

$$u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0. \lhd \tag{19}$$

Отметим, что согласно лемме 1 для того, чтобы было выполнено условие (19), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{n \to \infty} \sup_X |u_n(x))| = 0. \tag{20}$$

Т е о р е м а 3 (критерий Коши равномерной сходимости ряда). *Для того чтобы ряд* (14) *равномерно сходился на множестве* X , *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовал такой номер* n_0, *что для всех* n_0, *всех* $p = 0, 1, 2, ...$ *и всех* $x \in X$ *выполнялось неравенство*

$$|u_n(x) + u_{n+1}(x) + ... + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

$\triangleright$ В силу равенства

$$u_n(x) + u_{n+1}(x) + ... + u_{n+p}(x) = s_{n+p}(x) - s_{n-1}(x),$$

где $s_n(x)$ – частичные суммы рассматриваемого ряда, критерий Коши равномерной сходимости рядов сразу следует из критерия Коши равномерной сходимости последовательностей $\triangleleft$

З а м е ч а н и е 3. В дальнейшем нам понадобится следующее простое свойство равномерно сходящихся рядов.

Если ряд 14 *равномерно сходится на множестве* X, *а функция* f *ограничена на этом множестве, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x)u_n(x)$ *также равномерно сходится на* X $\triangleright$ Действительно, ограниченность функции f означает, что существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq c$. Поэтому для любых целых $n \geq 1?p \geq 0$ и любой точки $x \in X$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned}|f(x)u_n(x) + f(x)u_{n+1}(x) + ... + f(x)u_{n+p}(x)| = \\ = |f(x)|\,|u_n(x) + u_{n+1}(x) + ... + u_{n+p}(x)| \leq \\ \leq c\,|u_n(x) + u_{n+1}(x) + ... + u_{n+p}(x)|\,.\end{aligned}$$

Из этого неравенства следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(x)u_n(x)$ удовлетворяет на множестве X критерию Коши равномерной сходимости ряда, ибо этому критерию удовлетворяет исходный ряд (14). $\triangleleft$

Т е о р е м а 4 (признак Вейерштрасса). *Если числовой ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0, \tag{21}$$

сходится и для всех $x \in X$ *и для всех* $n = 1, 2, ...$ *выполняется неравенство*

$$|u_n(x)| \leq a_n, \tag{22}$$

то ряд 14 *абсолютно и равномерно сходится на множестве* X.

$\triangleright$ Абсолютная сходимость ряда (14) в каждой точке x множества X следует, согласно признаку сравнения (теорема 6 в п. 30.4), из неравенства (22) и сходимости ряда (21).

2.2 Задание 3

Задание 3 представлено на рисунке.1.

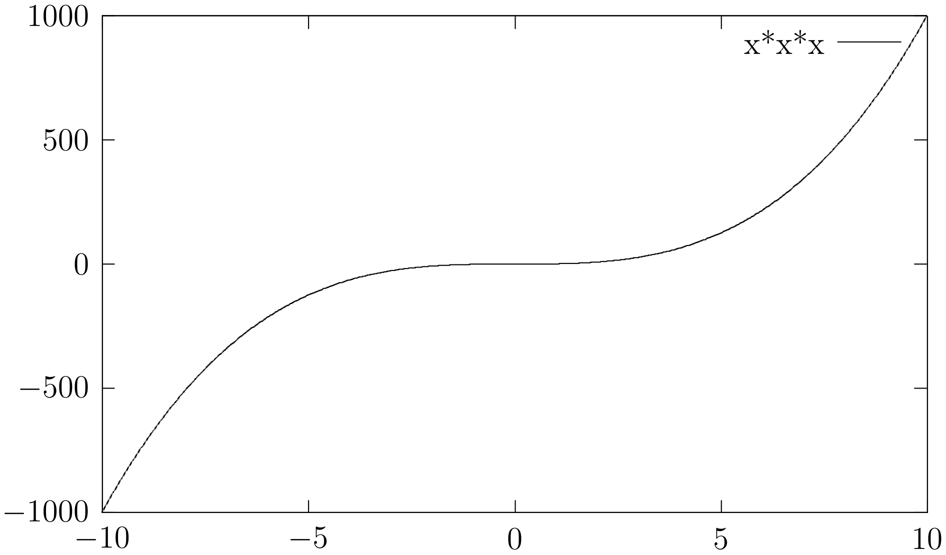

Рис. 1: $f(x) = x^3$