Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнила:
Белова Екатерина Павловна 22101#

____
подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2023

Содержание

1 Описание работы

За это полугодие я научилась многому работая с LateX, программным обеспечением, которое мне еще пригодится много раз при написании курсовых работ и отчетов. Работая над вторым заданиям, я научилась выводить математические формулы, встраивать их в текст, а также автоматически нумеровать, помимо этого я научилась оформлять текст и делать его приятным для чтения, что я считаю не менее важно! За второе задание мне нужно было вывести около 7 сложных формул, там были и формулы с интегралами, и с лимитами и даже системы уравнений, так же мне нужно было часто использовать греческие символы и буквы, для обозначений и т.д. Вторая лабораторная была очень полезной и интересной. Третья лабораторная не была такой же большой как вторая, она была посвящена только работе с Gnuplot, и позволила нам вывести различные графики, работать с тем как они выглядят, называть их так далее, хоть и сейчас мы мало использовали графики в этом полугодии, я рада что мы с ними ознакомились, это действительно будет очень полезно в будущем.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

страницы 265, 266, 267

отличаются друг от друга не более на три слагаемых. Поэтому, если $\mid f(x) \mid \leq M, a \leq x \leq b$, то

$$\mid \sigma_\tau - \sigma_\tau \mid \leq 3M \mid \tau \mid \to 0 \tau \mid \to 0$$

А так как существует предел

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau = \int\limits_c^a f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

то существует и равный ему предел

$$\lim_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau,$$

т.е. функция f интегрируема на отрезке [a,b]. $\lhd$

Замечание 3. Из свойства аддитивности интеграла и из теоремы 4 п. 23.6 следует интегрируемость так называемых кусочно неперывных на отрезке функций.

Функция называется *кусочно непрерывной на отрезке*, если она имеет на нем только конечное множество точек разрыва, и притом только первого рода. На концах отрезка функция может быть не определена.

Таким образом, функция f кусочно непрерывна на отрезке [a,b], если найдется такое разбиение $\tau = \{x_k\}_{k=0}^{k=k}$, что для всех k=1, 2. . . ,k_τ существуют конечные пределы $f(x_{k-1}+0)$ и $f(x_k - 0)$ В точках x_k, k=1, 2. . . ,k_τ, функци f может быть определена или не определена.

Если положить

$$f_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x_{k-1}+0) & \text{при} \quad x = x_{k-1}, \\ f(x) & \text{при} \quad x_{k-1} < x < x_k, \\ f(x_k - 0) & \text{при} \quad x = x_k, \end{cases}$$

то функция f_k будет непрерывна, а поэтому, согласно теореме 4 п. 23.6, и интегрируема на отрезке $[x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, \ldots, k_\tau$.

Отсюда следует интегрируемость функции f на отрезке $[a, b]$ (значения функции f в тех точках x_k, в которых она не определена, можно задавать произвольно: это не влияет ни на существование, ни на значение интеграла) и справедливость формулы

$$
\int_a^b f(x) dx=\sum_{k=1}^{k_\tau} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_k(x) dx
$$

5°.Интегрируемость произведения интегрируемых функ ци й. Если функции f и g интегрируемы на некотором отрезке, то их произведение также интегрируемо на этом отрезке. $\triangleright$ Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то они на нем ограничены, т. е. существует такая постоянная $A>0$, что для всех $x \in[a, b]$ выполняются неравенства

$$
|f(x)| \leqslant A, \quad|g(x)| \leqslant A \tag{1}
$$

а следовательно, и $|f(x) g(x)| \leqslant A^2$, т. е. произведение $f g$ ограничено на отрезке $[a, b]$. Проверим для него выполнимость критерия (23.21) интегрируемости функций. Из тождества

$$
\begin{aligned}
& f\left(x^{\prime}\right) g\left(x^{\prime}\right)-f(x) g(x)=\left[f\left(x^{\prime}\right)-f(x)\right] g\left(x^{\prime}\right)+\left[g\left(x^{\prime}\right)-g(x)\right] f(x), \\
& x \in[a, b], \quad x^{\prime} \in[a, b]
\end{aligned}
$$

имеем

$$
\begin{gathered}
\left|f\left(x^{\prime}\right) g\left(x^{\prime}\right)-f(x) g(x)\right| \leqslant\left|f\left(x^{\prime}\right)-f(x)\right|\left|g\left(x^{\prime}\right)\right|+\left|g\left(x^{\prime}\right)-g(x)\right||f(x)| \leqslant \\
\leqslant A\left[\left|f\left(x^{\prime}\right)-f(x)\right|+\left|g\left(x^{\prime}\right)-g(x)\right|\right] .
\end{gathered} \tag{2}
$$

Если $\tau=\left\{x_k\right\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ - разбиение отрезка $[a, b]$, то, выбирая точки x и $x^{\prime}$ в одном и том же отрезке $\left[x_{k-1}, x_k\right]$ этого разбиения и переходя в неравенстве (2) к верхним граням по всевозможным $x \in\left[x_{k-1}, x_k\right]$ и $x^{\prime} \in\left[x_{k-1}, x_k\right]$, получим

$$
\omega_k(f g) \leqslant A\left[\omega_k(f)+\omega_k(g)\right], \quad k=1,2, \ldots, k_\tau ;
$$

здесь $\omega_k(\cdot)$, как обычно, - колебание соответствующей функции на отрезке $\left[x_{k-1}, x_k\right]$. Отсюда

$$
\sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(f g) \Delta x_k \leqslant A\left[\sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(f) \Delta x_k+\sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(g) \Delta x_k\right] . \tag{3}
$$

В силу интегрируемости функций f и g на отрезке $[a, b]$ имеем (cm. 23.21)

$$
\lim _{|\tau| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{k_\tau} \omega(f) \Delta x_k=\lim _{|\tau| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(g) \Delta x_k=0 .
$$

Поэтому из неравенства (3) следует, что $\lim _{|\tau| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k(f g) \Delta x_k=0$, откуда в силу того же критерия (23.21) и вытекает интегрируемость произведения $f g$.$\triangleleft$

6°. Интегрирование частного интегри руемых функц и й. Если функции f и интегрируемы на некотором отрезке и абсолютная величина функции g ограничена на нем снизу положительной постоянной, то частное $\frac{f}{g}$ также интегрируемо на этом отрезке. $\triangleright$ Покажем, что при сделанных предположениях функция $\frac{1}{g}$ интегрируема. Пусть функция g интегрируема на отрезке $[a, b]$ и существует такая постоянная $c>0$, что для всех точек $x \in[a, b]$ выполняется неравенство $|g(x)| \geqslant c$. Тогда для любых точек $x, x^{\prime} \in[a, b]$ имеем

$$
\left|\frac{1}{g\left(x^{\prime}\right)}-\frac{1}{g(x)}\right|=\frac{\left|g(x)-g\left(x^{\prime}\right)\right|}{\left|g\left(x^{\prime}\right)\right||g(x)|} \leqslant \frac{1}{c^2}\left|g(x)-g\left(x^{\prime}\right)\right| .
$$

Если $\tau=\left\{x_k\right\}_{k=0}^{k=k_\tau}$ - разбиение отрезка $[a, b]$ и точки $x, x^{\prime}$ содержатся в одном и том же отрезке $\left[x_{k-1}, x_k\right], k=1,2, \ldots, k_\tau$, разбиения τ, то переходя к верхним граням в полученном неравенстве, будем иметь

$$\omega_k\left(\frac{1}{g}\right) \leqslant \frac{1}{c^2}\omega_k(g)$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{k_\tau} \omega_k\left(\frac{1}{g}\right)\Delta x_k \leqslant \frac{1}{c^2}\sum_{k=0}^{k_\tau}\omega_k(g)\Delta x_k.$$

В силу интегрируемости функции g правая часть неравенства стремится к нулю при $|\tau| \to 0$. Поэтому стремится к нулю и его левая часть. Это означает интегрируемость функции $\frac{1}{g}$ на отрезке $[a, b]$. Если функция f также интегрируема на этом отрезке, то частное $\frac{f}{g}$, будучи произведением интегрируемых функций f и $\frac{1}{g}$, согласно свойству $5°$ также интегрируемо. ◁

$7°$. Интегрирование неравенств. Если функции f и интегрируемы на отрезке $[a, b]u$

$$f(x) \geqslant g(x), \quad x \in [a, b] \tag{4}$$

то

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx \tag{5}$$

В частности, если $f(x) \geqslant 0, x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0 \tag{6}$$

▷ Из неравенства (4) следует, что для любых интегральных сумм $\sigma_\tau(f)$ и $\sigma_\tau(g)$ соответственно функций f и g выполняется неравенство

$$\sigma_\tau(f) = \sum_{k=1}^{k_\tau} f\left(\xi_k\right)\Delta x_k \geqslant \sum_{k=1}^{k_\tau} g\left(\xi_k\right)\Delta x_k = \sigma_\tau(g), \tag{7}$$

ибо $f\left(\xi_k\right) \geqslant g\left(\xi_k\right), k = 1, 2, \ldots, k_\tau$. Переходя в неравенстве (7) к пределу при $|\tau| \to 0$, получим неравенство (5).

Неравенство (6) следует из неравенства (5) при $g(x) \equiv 0$.◁

2.2 Задание 3