Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Багаев Г.М. группа 22101

____
подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2023

Содержание

1 Описание работы

Я закончил все работы по дисциплине LaTeX. Благодаря этому курсу, я нашел хорошую замену Microsoft Office Word в работе с математическими формулами и знаками. Преподаватель Богоявленская Ольга Юрьевна, при помощи двух лабораторных работ научила нас, как именно работать с LaTeX(TeX), показала, как можно построить график, добавить изображение в документ. Также, теперь мы умеем правильно оформлять страницы, создавать окружения для теорем и определений и многое другое.

Суть первого задания заключалась в создании математического текста - а именно нужно было написать один из параграфов учебника по курсу Математического анализа. На первый взгяд, задание показалось сложным. Но уже позже, изучив теорию к LaTeX по учебникам, предоставленным преподавателем и просмотрев скринкасты - уроки по работе с формулами, стало гораздо легче работать. Во время выполнения этого задания я изучил, какими командами можно написать математические символы в TeXe. Далее, рассмотрев специальные окружения программы, я добавлял к тексту теоремы и леммы, оформленные автоматически. Благодаря командам, втроенным в TeX, стало гораздо легче оформлять нумерацию формул, встречаемых в тексте. В конце выполнения задания мною была проделана еще одна сложная часть работы - добавление колонтитулов к тексту, включение названий параграфа и глав в документ. В целом, задание было очень интересным, и, думаю, в будущем, навыки, полученные во время выполнения данной задачи, помогут правильно и легко работать с курсовыми работами.

Суть второй задачи - вставка в документ рисунка(а именно, графика определенной функции), нарисованного с помощью интерпретатора Gnuplot. И опять, с помощью скринкастов преподавателя и различный учебников по LaTeXу я научился рисовать график и с помощью специального окружения $begin\{figure\}$ и $end\{figure\}$ добавлять этот графиик в основной документ. Таким образом, учебная практика помогла освоить и этот этап в программировании, в работе с различными текствоыми файлами/документами.

Исходя из всего вышесказанного, хочется сказать, что курс по дисциплине LaTeX оказался очень полезен как для математиков, так и для программистов. Да и в целом, я думаю всем студентам нужно знать хотя бы базовые навыки работы в LaTeX.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

[10pt]article [utf8]inputenc [T1]fontenc amsmath amsfonts amssymb [version=4]mhchem stmaryrd [english, russian]babel

смысле определения 1, и покажем, что тогда число a является и пределом функции в смысле определения 6. Допустим, что это не так, т. е. (см. (1), что существует такая окрестность $U(a)$, что для любой окрестности $U\left(x_0\right)$ найдется такая точка $x \in X \cap U\left(x_0\right)$, что $f(x) \notin U(a)$, или, в символической записи,

$$\exists U(a) \quad \forall U\left(x_0\right) \quad \exists x \in X \cap U\left(x_0\right): f(x) \notin U(a). \tag{1}$$

В частности, указанные точки x найдутся в каждой окрестности $U\left(x_0, 1/n\right), n=1,2,\ldots$, точки x_0. Обозначим Эти точки x_n, т. е.

$$x_n \in X \cap U\left(x_0, 1/n\right), \tag{2}$$

$$f\left(x_n\right) \notin U(a). \tag{3}$$

Из условия 2 следует (см. пример в П. 5.3), что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \tag{4}$$

Поскольку $a = \lim_{x \to x_0} f(x)$ в смысле определения 1, то из выполнения условия 4 следует, что $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$. Следовательно, для любой окрестности $U(a)$, в частности, и для окрестности $U(a)$, указанной в условии 3, существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется включение

$$f(x_n) \in U(a) \tag{5}$$

что противоречит условию 3. В одну сторону утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь $a = \lim_{x \to x_0} f(x)$ в смысле определения 6 предела функции $f : X \to R, x_0$ - точка прикосновения множества X и $x_n \to x_0, x_n \in X, n = 1, 2, \ldots$ Покажем, что $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$. Зададим произвольно окрестность $U(a)$ точки a и выберем для нее окрестность $U(x_0)$ точки x_0, Удовлетворяющую условию 1. Для окрестности $U(x_0)$ В силу условия $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется включение $x_n \in U(x_0)$, а так как $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, то при $n > n_0$ будем иметь $x_n \in X \cap U(x_0)$. Следовательно, в силу 1 при $n > n_0$ имеет место включение $f(x_n) \in U(a)$, т. е. $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$

Это и означает, что $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ в смысле определения 1.$\triangleleft$

6.4. Условие существования предела функции. Согласно определению предела функции (п. 6.1) для того, чтобы существовал предел $\lim_{x \to x_0} f(x)$ функции $f(x), x \in X$, нужно, чтобы для любых последовательностей $x_n \to x_0, x_n \in X, n = 1, 2, \ldots$, существовали пределы $\lim_{n \to \infty} f(x_n)$ и они были равны между собой. Покажем, что второе условие вытекает из первого. То есть, не предполагая равенство этих пределов, а предполагая только их существование, можно доказать их равенство, а следовательно, и существование предела функции. Точнее, докажем следующее утверждение.

Лемма 1

Для того чтобы функция $f(x), x \in X$, имела конечный или определенного знака бесконечный предел в точке x_0, являющейся конечной или бесконечно удаленной точкой прикосновения множества X, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $x_n \to x_0, x_n \in X, n = 1, 2, \ldots$, последовательность соответствующих значений функции $\{f(x_n)\}$ имела предел (конечный или определенного знака бесконечный).

$\triangleright$ Необходимость сформулированного условия для существования $\lim_{x \to x_0} f(x)$ содержится в самом определении предела функции (см. 1), в котором утверждается существование пределов $\lim_{n \to \infty} f(x_n)$ для всех указанных в условиях леммы последовательностей $\{x_n\}$.

Докажем достаточность этого условия для существования предела функции. Пусть $x_n' \to x_0, x_n'' \to x_0, x_n' \in X, x_n'' \in X, n = 1, 2, \ldots$, и существуют пределы $\lim_{n \to \infty} f(x_n') \in \bar{R}, \lim_{n \to \infty} f(x_n'') \in \bar{R}$. Покажем, что они равны. Положим

$$x_n = \begin{cases} x_k', & n = 2k - 1, \\ x_k'', & n = 2k, \end{cases} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Тогда $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ и $x_n \in X, n = 1, 2, \ldots$ Согласно условиям леммы существуют пределы

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n'), \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n''), \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n)$$

причем $\{f(x_n')\}$ и $\{f(x_n'')\}$ являются подпоследовательностями последовательности $\{f(x_n)\}$.

Поскольку из существования у последовательности предела (конечного или бесконечного) следует существование того же предела у любой ее подпоследовательности, то будем иметь

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n') = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(x_n'').$$

Таким образом, пределы последовательностей $\{f(x_n)\}$, где $x_n \rightarrow \rightarrow x_0, x_n \in X, n = 1, 2, \ldots$, не зависят от выбора указанных последовательностей $\{x_n\}$. Обозначив общее значение пределов последовательностей $\{f(x_n)\}$ через a, получим $\lim_{x\rightarrow x_0} f(x) = a.\triangleleft$

6.5. Предел функции по объединению множеств.

Лемма 2

Пусть функиия f задана на объединении $X_1 \cup X_2$ множеств X_1 и X_2, а x_0 является точкой их прикосновения. Тогда если при $x \rightarrow x_0$ функция f имеет равные пределы по множествам X_1 и X_2, то она имеет тот же предел и по их объединению.

$\triangleright$ Если

$$\lim_{x\rightarrow x_0 x\in X_1} f(x) = \lim_{x\rightarrow x_0 x\in X_2} f(x) = a$$

то для любой окрестности $U(a)$ точки a существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что образы ее пересечений $X_1 \cap U(x_0)$ и $X_2 \cap U(x_0)$ с множествами X_1 и X_2 содержатся в окрестности $U(a)$, а тогда и образ их объединения $(X_1 \cup X_2) \cap U(x_0)$ также содержится в $U(a)$. Это и означает, что

$$\lim_{x\rightarrow x_0 x\in X_1\cup X_2} f(x) = a.\triangleleft$$

6.6. Односторонние пределы и односторонняя непрерывность. Введем обозначения: для любого числового множества X и любой точки x_0 расширенной числовой прямой $\bar{R}$ положим

$$X_+(x_0) \overset{def}{=} \{x \in X : xx_0\}, \quad X_-(x_0) \overset{def}{=} \{x \in X : xx_0\}.$$

Если $x_0 \in X$, то $x_0 \in X_+, x_0 \in X_-$, а если $x_0 \notin X$, то $x_0 \notin X_+$, $x_0 \notin X_-$. Очевидно, если $x_0 = +\infty$, то $X_+(x_0) =$, а если $x_0 = -\infty$, то $X_-(x_0) =$.

В случае когда множество $X_+(x_0)$ (соответственно множество $X_-(x_0)$) непусто, условие, что x_0 является его точкой прикосновения, равносильно тому, что $x_0 = \inf X_+(x_0)$ (соответственно $x_0 = = \sup X_-(x_0)$).

Определение 7 . Пусть задана функция $f(x), x \in X$ и $x_0 \in \bar{R}$. Точка a называется пределом функиии f слева при $x \rightarrow x_0$ (соответственно справа), если она является пределом при $x \rightarrow x_0$ функции f по множеству $X_-(x_0)$ (соответственно по множеству $X_+(x_0)$), т. е. если

$$\lim_{x\rightarrow x_0 x\in X_-(x_0)} f(x) = a \quad (\lim_{x\rightarrow x_0 x\in X_+(x_0)} f(x) = a).$$

В силу этого определения предел $\lim_{x\rightarrow +\infty} f(x)$ причисляется к пределам слева, а $\lim_{x\rightarrow -\infty} f(x)-$ к пределам справа.

Иначе говоря, предел функции f слева в точке x_0 - это предел в этой точке сужения функции f на множество $X_+(x_0)$, а предел справа - это предел сужения f на множество $X_-(x_0)$.

Для пределов справа и слева сужения функции f на множество $X \setminus \{x_0\}$, т. е. для случая, когда предел берется по множеству, не содержащему точку x_0, имеются специальные обозначения: для предела слева $f(x_0 - 0)$ и $\lim_{x\rightarrow x_0 - 0} f(x)$, а для предела справа $f(x_0 + 0)$ и $\lim_{x\rightarrow x_0 + 0} f(x)$. При этом в случае $x_0 = 0$ вместо $0 + 0$ и $0 - 0$ пишут $+0$

2.2 Задание 3

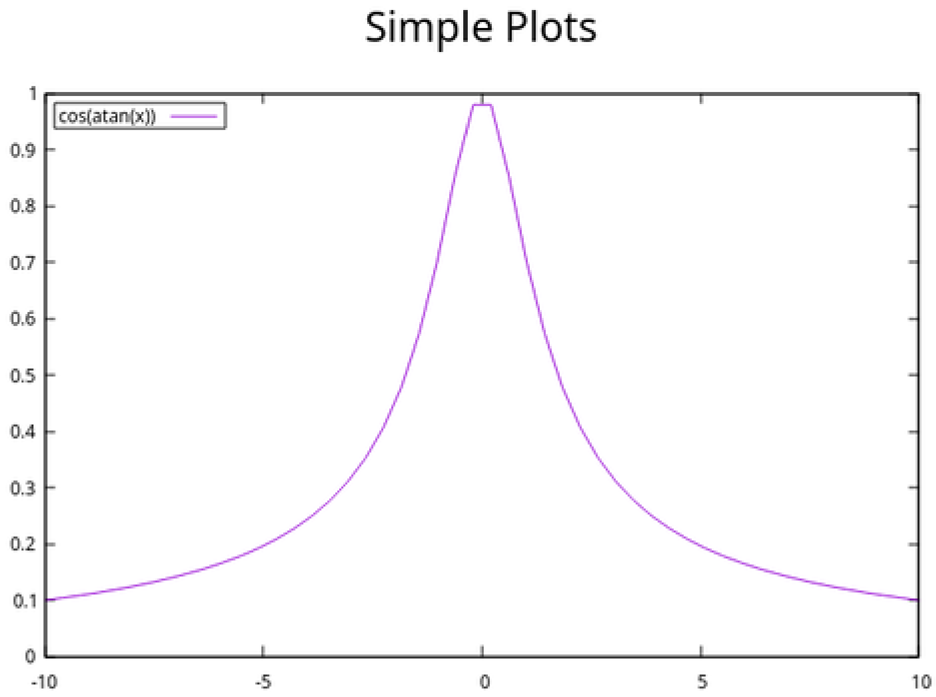

Рис. 1: График