Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Артамонов А. Р. группа #22104

____
подпись

Руководитель практики:
Преподаватель Сосновский И. В

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2023

Содержание

1 Описание работы

Во втором семестре я познакомился с такой программой как LaTex, которая помогает в написании математических формул, центрировании их, автонумерации, расстановке переносов и отступов. Первое задание было ознакомительным, выполняя ее я узнал о правильной структуре документа и о специальных символах. Во второй работе было необходимо перенести целый параграф из книги, используя инстурменты программы. На ее выполение понадобилось чуть больше времени, чтобы сделать документ максимально приближенным к оригиналу, но результат стоил потраченного времени. В третьем задании я научился использовать gnuplot для создания графиков функций и соотвественно их добавлению в документ. Я считаю, что LaTex очень удобная программа, хоть и требует некоторого мастерства.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

§25. Определенный и неопределенный интегралы

25.1. Дифференцирование определенного интеграла по пределам интегрирования. При изучении свойств интеграла была установлена (см. свойство 10° в п. 24.1) его непрерывность по пределам интегрирования, т.е. непрерывность функций

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad G(x) = \int_b^x f(t)dt$$

на отрезке [a,b]. Оказывается, что с "улучшением" свойств подынтегральной функции f "улучшаются" и свойства функций F и G. Так, например, если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то будет показано, что функции F и G являются уже дифференцируемыми.

Докажем даже более точную теорему о дифференцируемости функции F в точке x_0.

Т е о р е м а 1. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ дифференцируема в точке и*

$$F^{'}(x_0) = f(x_0) \tag{25.1}$$

С л е д с т в и е. *Всякая непрерывная на отрезке функция имеет на нем первообразную.*

$\triangleright$ Используя представление приращения $\Delta F(x_0)$ в виде (см. (24.25))

$$\Delta F(x_0) = \int_{x_0}^{x0+\Delta x} f(t)dt, x_0 \in [a, b]x_0 + \Delta x \in [a, b]$$

и тождество $\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x0+\Delta x} dt = 1$ будем иметь

$$|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)| = |\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \frac{f(x_0}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt|$$

$$= |\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} [f(t) - f(x_0)]dt| \leqslant \frac{1}{|\Delta x|}|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|dt| \tag{25.2}$$

Зададим произвольно $\epsilon > 0$. В силу непрерывности функции f в точке x_0 существует такое $\delta > 0$, что если $|t - x_0| < \delta$ и $t \in [a, b]$, то

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{25.3}$$

Пусть Δx таково, что $|\Delta x| < \delta$; тогда для всех значений t, принадлежащих отрезку с концами x_0 и $x_0+\delta x$ (по которому ведется интегрирование в неравенстве (25.2), будем иметь $|t-x_0| \leqslant |\Delta x| < \delta$ и, следовательно,

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{25.4}$$

Поэтому

$$|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)| \leqslant \frac{1}{|\Delta x|} |\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)| dt| \underset{25.4}{\leqslant}$$

$$\underset{25.4}{\leqslant} \frac{\epsilon}{|\Delta x|} |\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} dt| = \varepsilon$$

Это, согласно определению предела, и означает, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$ и, таким образом, формула (25.1) доказана. $\lhd$

Для доказательства следствия достаточно заметить, что равенство (25.1) в случае непрерывной на отрезке функции имеет место во всех точках этого отрезка.

З а м е ч а н и е. Из доказанного следует, что в условиях теоремы 1 функция

$$G(x) = \int_x^b f(t) dt$$

также имеет производную в точке x_0 и

$$G^{'}(x_0 = -f(x_0) \tag{25.5}$$

Это сразу следует из формулы 25.1, ибо (см. (24.26))

$$G(x) = \int_a^b f(t) dt - F(x)$$

и $\int_a^b f(t)dt$— постоянная величина.

Если функция f непрерывна на отрезке [a,b], то для каждой его точки x справедливы формулы

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x), \quad \frac{d}{dx} \int_x^b f(t) dt = -f(x). \tag{25.6}$$

25.2. Существование первообразной. Т е о р е м а 2. *Если функция f непрерывна во всех точках некоторого промежутка Δ, то на этом промежутке у нее существует первообразная; при этом если x_0 — какая-либо точка рассматриваемого промежутка Δ, то функция*

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad x \in \Delta, \tag{25.7}$$

является одной из первообразных функций f на промежутке Δ.

$\rhd$ Достаточно проверить, что функция (25.7)) действительно является первообразной функции f. Если $x > x_0$, $x \in \Delta$, то равенство $F^{'}(x) = f(x)$ сразу следует из теоремы 1. Если же $x < x_0$, $x \in \Delta$, то

$$F^{'}(x) = \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f(t) dt = -\frac{d}{dx} \int_x^{x_0} f(t) dt = -(-f(x)) = f(x). \quad \lhd$$

З а м е ч а н и е 1. Совокупность всех первообразных непрерывной на некотором промежутке Δ функции f составляет неопределенный интеграл $\int f(x)dx$, $x \in \Delta$, а определенный интеграл $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$, $x_0 \in \Delta$, $x \in \Delta$, является одной из первообразных функции f на Δ. Поскольку две любые первообразные отличаются на постоянную, то

$$\int f(x)dx = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + C, \tag{25.8}$$

где C — произвольная постоянная. Так выглядит связь между неопределенным и определенным интегралами. Из теоремы 2 следует, что у всякой непрерывной на некотором промежутке функции существует на этом промежутке неопределенный интеграл.

Теорема 3 (основная теорема интегрального исчисления). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то, какова бы ни была на этом отрезке ее первообразная Φ, справедлива формула*

$$\int_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a), \tag{25.9}$$

называемая формулой Ньютона–Лейбница.

$\triangleright$ По теореме 2 функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ является первообразной функции f на отрезке $[a,b]$. Если Φ — какая-либо первообразная на $[a,b]$ той же функции f, то они отличаются на постоянную, т. е. существует такая постоянная C, что для всех $x \in [a,b]$ имеет место равенство

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x) + C. \tag{25.10}$$

Положив здесь $x = a$ и вспомнив, что $\int_a^a f(t)dt = 0$ получим $C = -\Phi(a)$ Подставив это значение в формулу (25.10), будем иметь

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x) - \Phi(a), \quad x \in [a,b]$$

Формула (25.9) получается отсюда при $x = b$. $\triangleleft$

Отметим, что формула Ньютона—Лейбница (25.9)) справедлива и для $a > b$. Действительно, если в ней поменять местами a и b, то обе части равенства (25.9)изменят знак на противоположный.

Замечание 2. В формуле 25.9 $\Phi' = f(t)$. Поэтому ее можно записать в виде

$$\int_a^x \Phi'(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a) \tag{25.11}$$

т. е. интеграл от непрерывной производной равен разности значений самой функции на концах отрезка, по которому производится интегрирование.

Замечание 3. С помощью формулы (25.11) нетрудно показать, что формула Ньютона–Лейбница (25.9) остается верной и в случае, когда функция Φ непрерывна, а ее производная f кусочно-непрерывна на отрезке $[a,b]$ (см. замечание 3 в п. 24.1), а равенство $\Phi' = f(x)$ выполняется во всяком случае во всех точках непрерывности функции f.

Примером непрерывной первообразной кусочно непрерывной функции f является, например (см. теорему 1), функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Примеры. 1. Вычислить значение интеграла $\int_0^1 x^3dx$. Поскольку $\int x^3dx = \frac{x^4}{4} + C$ то по формуле Ньютона–Лейбница получим

$$\int_0^1 x^3dx = \frac{x^4}{4}\bigg|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

2. Найдем значение интеграла $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$. Имеем

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

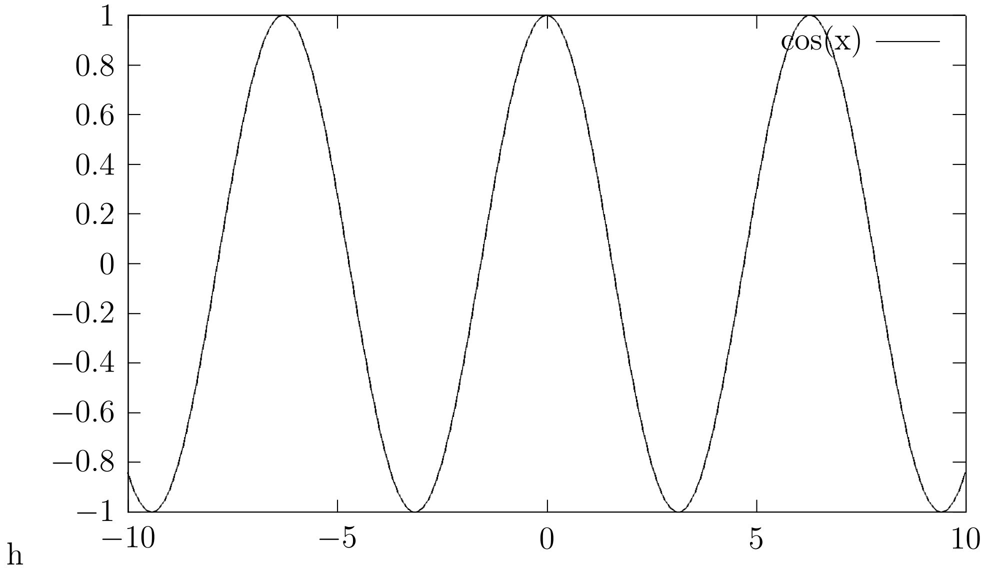

Рис. 1: cos(x)

2.2 Задание 3

Задание 3 представлено на рисунке 1.