Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Алексеев Н. С. группа 22104

____
подпись

Руководитель практики:
программист 1 категории, В. М. Димитров

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2023

Содержание

1 Описание работы

Первое требует переписывания содержимого PDF-файла вручную, с особым вниманием к формулам и символам. Моя задача состоит в следующем:

Я создаю новый файл $LaTeX$, используя текстовый редактор или интегрированную среду разработки $LaTeX$. Этот файл будет основным файлом проекта, в котором я буду переписывать содержимое.

Затем я копирую код преамбулы и настроек из предоставленного PDF-файла. Преамбула содержит информацию о классе документа, используемых пакетах, настройках страницы и заголовке документа. Вставляю этот код в начало нового файла $LaTeX$.

После преамбулы я копирую оставшуюся часть текстового содержимого из PDF-файла. В этом этапе я обращаю особое внимание на формулы и символы, такие как греческие буквы, математические операторы и специальные символы форматирования.

Для отображения формул в $LaTeX$ я использую математический режим, заключая формулы в символы $...$ и не только. Также обращаю внимание на правильное использование индексов, интегралов, сумм и других математических операторов.

Если требуется, я добавляю дополнительные команды и пакеты $LaTeX$ для правильного форматирования и отображения содержимого. Это может включать команды для специальных символов, настройки шрифтов или пакеты для создания специфических математических окружений.

После завершения переписывания текста я провожу тщательную проверку наличия ошибок форматирования и опечаток. Удостоверяюсь, что все символы и формулы правильно отображаются, и что структура документа сохранена.

Затем сохраняю $LaTeX$-файл и компилирую его с помощью $LaTeX$-компилятора, такого как $pdflatex$ или $xelatex$. Это создает новый PDF-файл, содержащий переписанное содержимое из исходного PDF.

Таким образом, выполнение задания позволяет мне создать новый $LaTeX$-файл, в котором сохранены все текстовые и математические элементы исходного PDF-файла, с учетом правильного форматирования и отображения символов и формул.

Второе задание требовало использования программы *Gnuplot* для создания графика. Путь выполнения этого задания выглядал следующим образом:

Мы начинали с изучения скринкастов и материалов по использованию *Gnuplot*. Это позволяло нам понять основные принципы работы программы, ее функциональность и синтаксис команд.

Затем мы создавали собственный график с помощью *Gnuplot*. Мы определяли данные, которые нужно отобразить на графике, и вводили соответствующие команды *Gnuplot* для построения графика с заданными параметрами (например, тип линии, цвет, масштаб и т.д.). Мы могли использовать различные типы графиков, такие как линейные, точечные, столбчатые и т.д., в зависимости от требований задания.

После того, как мы создали график в *Gnuplot*, мы сохраняли его в формате PNG или другом подходящем формате изображения. Для этого мы использовали соответствующую команду *Gnuplot*, указывая имя файла и настройки сохранения (разрешение, размер и т.д.).

Затем мы вставляли сохраненное изображение графика в $LaTeX$-файл. Для этого мы использовали соответствующий пакет $LaTeX$ (например, usepackagegraphicx) и команду для вставки изображения (includegraphics). Мы указывали путь к файлу изображения и настраивали его размер и положение на странице.

В результате мы получали $LaTeX$-файл, содержащий вставленный график в соответствии с требованиями задания. Мы сохраняли и компилировали $LaTeX$-файл, чтобы получить окончательный PDF-документ с вставленным графиком.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

следует, что для всех номеров $n > n_0$ выполняется неравенство

$$\beta' < x_{n0} \le x_n < \beta, \tag{5.53}$$

и поскольку $(\beta', \beta] \subset U(\beta)$, то при $n > n_0$ имеет место включение

$$x_n \in U(\beta), \tag{5.54}$$

а это и означает, что β является пределом последовательности $\{x_n\}$.

Аналогично рассматривается случай $x_n \downarrow$. $\triangleleft$

Замечание. Если $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots,$ – система вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю, а ε – точка, принадлежащая всем отрезкам этой системы, то

$$\varepsilon = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{5.55}$$

В самом деле, последовательность $\{a_n\}$ возрастает, а $\{b_n\}$ убывает, кроме того (см. (4.25) в п. 4.5), было показано, что $\varepsilon = \sup\{a_n\} = \inf\{b_n\}$. Поэтому равенство (5.55) сразу следует из теоремы 3.

Пример 6 (число ϵ). Рассмотрим последовательность

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{5.56}$$

и покажем, что она строго возрастает и ограничена сверху, а следовательно, согласно теореме 3 имеет конечный предел.

Применив формулу бинома Ньютона, получим $\mathrm{x}_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2} + \dots$
$\dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \dots + \frac{n(n-1)\dots1}{n!}\frac{1}{n^n} =$
$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots$
$\dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$. Из выражения, стоящего в правой части равенства, видно, что при переходе от n к $n+1$ число слагаемых (которые все положительны) в написанной сумме возрастает на единицу и каждое слагаемое, начиная с третьего, увеличивается, так как становится больше выражение, стоящее в каждых круглых скобках, ибо

$$1 - \frac{s}{n} < 1 - \frac{s}{n+1}, \quad s = 1, 2, \dots, n-1, \quad n = 2, 3, \dots$$

Это означает строгое возрастание последовательности (5.56):

$$x_n < x_{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{5.57}$$

Далее, поскольку

$$1 - \frac{s}{n}, \quad s = 1, 2, \dots, n-1, \quad n = 2, 3, \dots \tag{5.58}$$

$$2^{n-1} = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n} \le 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

и поэтому

$$\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}} \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5.59}$$

то при $n > 1$ их равенства (5.57) получим $\mathrm{x}_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} <$ $< 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1-1/2} = 3$ (мы заменили сумму конечной геометрической прогрессии суммой бесконечной геометрической прогрессии, так как у последней проще формула). Итак,

$$x_n < 3, \tag{5.60}$$

т. е. последовательность (5.56) ограничена сверху. Из (5.58) и (5.61) следует, что она имеет конечный предел. Он обозначается через ϵ:

$$\epsilon \stackrel{def}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{5.61}$$

Поскольку $2 < x_n < 3$ и $x_n \uparrow$, то $2 < \epsilon \le 3$. Можно показать, что ϵ – иррациональное число и что с точностью до 10^{-15}

$$\epsilon \approx 2,718281828459045.$$

5.8. Принцип компактности. Если дана последовательность $\{x_n\}$ и из некоторых ее членов x_{n_k}, взятых в порядке возрастания номеров n_k ($k > k'$ равносильно $n_k > n_{k'}$), составлена новая последовательность $\{x_{n_k}\}$, то она называется *подпоследовательностью последовательности* $\{x_n\}$.

В подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ k является номером члена этой последовательности, а n_k – его номером в исходной последовательности. Ясно, что для всех $k = 1, 2, \ldots$ имеет место неравенство $n_k \ge k$, и поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$.

Подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ считаются различными, если они соответствуют различным наборам номеров $\{n_k\}$. Различные подпоследовательности одной и той же последовательности, рассматриваемые как последовательности, могут оказаться одинаковыми. Так, последовательность $x_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots$, как и любая последовательность , имеет бесконечно много различных подпоследовательностей (можно, например, выбрать четные номера, нечетные, кратные трем, четырем и т.д.), но все эти подпоследовательности как последовательности совпадают, очевидно, с данной последовательностью $x_n = 0,\ n = 1, 2, \ldots$

Выше было показано (см.п. 5.4), что если числовая последовательность имеет конечный предел, то она ограничена. Обратное, конечно, неверно. Например, последовательность $x_n = (-1)^n,\ n = 1, 2, \ldots$, ограничена, но не имеет предела. Вместе с тем, если вся ограниченная последовательность не имеет предела, то у нее всегда существует подпоследовательность, которая имеет предел. Точнее, имеет место следующий факт.

Теорема 4. *Из любой ограниченной числовой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность, а из любой неограниченной сверху (неограниченной снизу)числовой последовательности – последовательность, имеющую своим пределом $+\infty$ (соответственно $-\infty$).*

$\triangleright$ Рассмотрим сначала случай, когда последовательность $\{x_n\}$ ограничена , т.е. существуют такие $a \in R$ и $b \in R$, что для всех номеров n выполняется неравенство $a \leq x \leq b$.

Разделим отрезок $[a, b]$ на два равных отрезка точкой $\frac{a+b}{2}$. Тогда по крайней мере на одном из них – обозначим его $[a_1, b_1]$ – окажется бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Выберем произвольно какой-либо член этой последовательности, содержащийся в отрезке $[a_1, b_1]$. Пусть его номер равен n_1:

$$x_{n_1} \in [a_1, b_1], \quad b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}. \tag{5.62}$$

Снова разделим отрезок $[a_1, b_1]$ на два равных отрезка и тот из них, на котором лежит бесконечно много членов последовательности (по крайней мере для одного и з них это условие выполняется), обозначим $[a_2, b_2]$. Поскольку на отрезке $[a_2, b_2]$ лежит бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$, то среди них заведомо есть члены с номерами, большими чем n_1. Выберем один из таких членов. Если его номер n_2, то

$$x_{n_2} \in [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1], \quad n_2 > n_1, \tag{5.63}$$

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}. \tag{5.64}$$

Продолжая этот процесс, получим такую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ (т.е. $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$) последовательности $\{x_k\}$, что

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k, \tag{5.65}$$

$$[a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}], \tag{5.66}$$

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{5.67}$$

и, следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}(b_k - a_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{b-a}{2^k} = 0$.

2.2 Задание 3

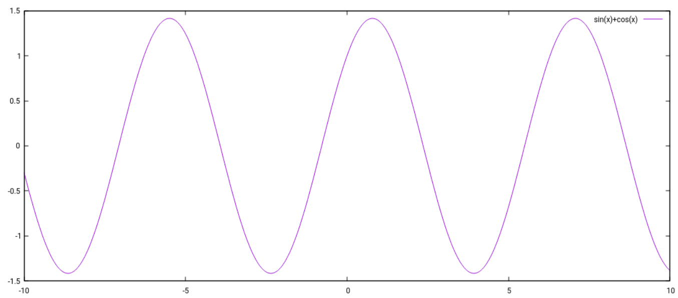

Рис. 1: A simple caption