Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Светлов И. А. группа 22101

____
подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2022

Содержание

1 Описание работы

В ходе курса Учебной практики "Компьютерные технологии в математике"я научился многим необходимым базовым вещам системы Latex. В первом задании я узнал о специальных символах и группах, а также научился их использовать. Структуру Latex-файла также была изучена в этом задании. В задании номер 2 было необходимо переписать текст из учебника со всеми формулами через систему Latex. Я овладел множеством полезных команд как для написания формул, так и для оформления текста. Я узнал об уже вложенных в систему окружениях и о создании и изменении собственных. В третьем задании нужно было построить график произвольной функции с помощью системы Gnuplot. Также было необходимо разместить получившийся график в файле задания 2.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

теорему 1:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}\underset{(13.3)}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{r'_n(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}\underset{(13.3)}{=}\dots=\lim_{x\to x_0}\frac{r^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)^n}\underset{(13.2)}{=}$$
$$\underset{(13.2)}{=}\frac{r^{(n)}(x_0)}{n!}=0.$$

Это и означает выполнение условия (14.2). Итак, доказана следующая

Теорема 1 *Если функция f n дифферинцируема в точке x_0, то в некоторой окрестности этой точки*

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dots$$
$$\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),x\to x_0. \qquad (1)$$

Многочлен

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dots+\frac{f'^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{f'^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad (2)$$

называется *многочленом Тейлора$*$) (порядка n)*, формула (1) *формулой Тейлора (порядка n)* для фунции f в точке $x=x_0$, а функция

$$r_n(x)=f(x)-P_n(x) \qquad (3)$$

— *остаточным членом (порядка n)* формулы Тейлора, а его представление в виде (14.2) т.е.

$$r_n(x)=o((x-x_0)^n),x\to x_0,$$

— записью остаточного члена в *виде Пеано$**$).* Частный случай формулы Тейлора (1) при $x_0=0$ называется *формулой Маклорен$***$)*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+r_n(x), \qquad (4)$$

где, согласно (14.2), остаточный член $r_n(x)$ можно записать в виде

$$r_n(x) = o(x^n), x \to 0 \tag{5}$$

из нижеследующуй теоремы будет следовать, что Многочен Тейлора Единственный в своем роде. Именно никакой другой многочлен не
приближает функцию, заданную в окрестности точки x_0 с точностью до бесконечно малых того же порядка относительно $x - x_0, x \to x_0$что и многочлен Тейлора.

Предварительно отметим, что любой многочлен $P_n(x) = \sum\limits_{(k=0)}^{n} a_x x^k$ степени n для любого x_0 может быть записан в виде $P_n(x) = \sum\limits_{(k=0)}^{n} b_k(x-x_0)^k$. Действительно положив $b = x - x_0$, использовав формулу бинома Ньютона и собрав члены с одинаковыми степенями b, получим

$$P_n(x) = \sum_{(k=0)}^{n} a_k x^k = \sum_{(k=0)}^{n} a_k(x_0+b)^k = \sum_{(k=0)}^{n} b_k h^k = \sum_{(k=0)}^{n} b_k(x-x_0)^k,$$

где b_k — некоторые постоянные.

Теорема 2 *Если функция f задана в некоторой окрестности точки x_0 и имеет представление*

$$f(x) = \sum_{(k=0)}^{n} b_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0, \tag{6}$$

то такое представление единственно.

$\triangleright$ Пусть наряду с представлением (6) имеет место предствавлени

$$f(x) = \sum_{(k=0)}^{n} b_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0. \tag{7}$$

Тогда, положив

$$c_k = b_k - a_k, k = 0, 1, \dots, n, \tag{8}$$

и вычтя из равенства (7) равенство (6), получим

$$\sum_{(k=0)}^{n} c_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) = 0, \quad x \to x_0. \tag{9}$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу при $x \to x_0$ получим $c_0 = 0$.

Заметим, что $o((x-x_0)^m) = \varepsilon(x)(x-x_0)^m$, $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$, и, следовательно, при $x \neq x_0, m = 1, 2, \dots$

$$\frac{o((x-x_0)^m)}{x-x_0} = \varepsilon(x)(x-x_0)^{m-1} = o((x-x_0)^{m-1}), \quad x \to x_0.$$

Сократив на $x - x_0, x \neq x_0$, левую часть равенства (9) (в нем как уже доказано $c_0 = 0$), получим

$$\sum_{(k=0)}^{n-1} c_k(x-x_0)^{k-1} + o((x-x_0)^{n-1}) = 0, \quad x \to x_0.$$

е Перейдя в этом равенстве к пределу при $x \to x_0, x \neq x_0$, получим $c_1 = 0$. Продолжая этот процесс после m–го шага, $0 \leqslant m \leqslant n$, получим

$$\sum_{(k=0)}^{n-1} c_k(x-x_0)^{k-m} + o((x-x_0)^{n-m}) = 0, \quad x \to x_0,$$

отсюда при $x \to x_0$ следует, что $c_m = 0, m = 0, 1, \dots, n$.

Таким образом, в силу равенств (8.

$$a_k = b_k, k = 0, 1, \dots, n. \lhd$$

Теорема 2 называется обычно *теоремой единственности.* Из нее следует, если для n раз дифферницируемой в точке функции f получено представление ее в виде (6), то это представление является ее разложением по формуле Тейлора. В самом деле, при сделанных предположениях, согласно теореме 1, такое представление существует, а другого в силу теоремы 2 нет.

Примеры разложения по формуле Тейлора.

Пример 1 *Напишем формулу Маклорена для функции $f(x) = \sin x$.*

Так как $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2}$(см.п. 11.1), то

$$f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2} = x \begin{cases} 0, & \text{если} \quad n = 2k, \\ (-1)^k, & \text{если} \quad n = 2k+1, \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \dots,$$

Поэтому

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0. \tag{10}$$

2. Для функции $f(x) = \cos x$ имеем аналогично

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2},$$

$$f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad n = 2k+1, \\ (-1)^k, & \text{если} \quad n = 2k, \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \dots,$$

поэтому

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0. \tag{11}$$

3. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$. Так как$(e^x)^{(n)}$, то $f^{(n)}(0) = 1$ и, следовательно,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0. \tag{12}$$

Отсюда следует, что

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots (-1)^n\frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0. \tag{13}$$

2.2 Задание 3

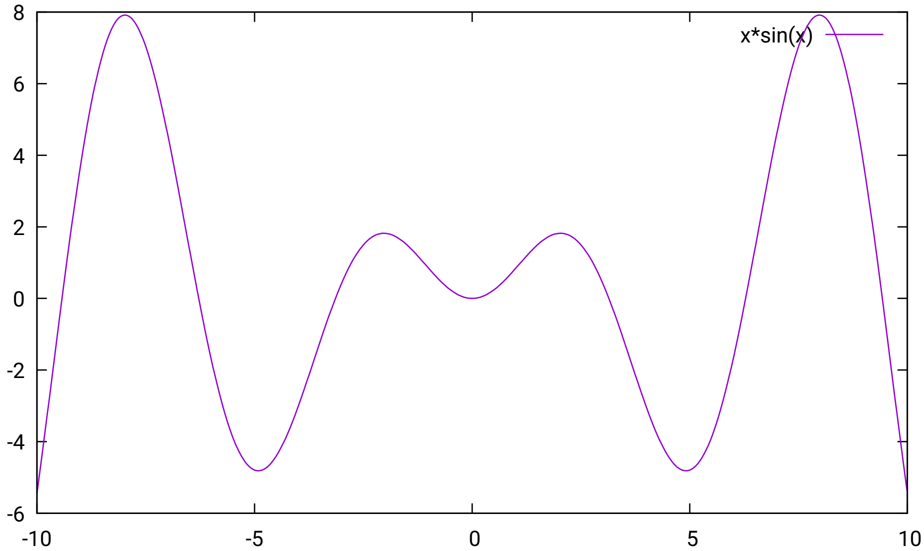

Рис. 1: $x \sin x$