Министерство образования и науки Российской Федерации

ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»

Институт математики и информационных технологий

Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике

(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:

Шинкевич В. Е. группа 22103

____

подпись

Руководитель практики:

к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____

подпись

Итоговая оценка:

____

оценка

Петрозаводск, 2022 г.

Содержание

1 Описание работы

В первом задании нас обучают принципам работы на Latex и его следующей трансляции в pdf-формат.

Во втором задании требовалось создать документ - копию трёх страниц :246, 247, 248 из учебника Кудрявцева Л. Д. "Краткий курс математического анализа". При выполнения данной работы я пользовался учебным пособием *"Работа в системе LaTeX"* и материалами сайта "Stack Exchange".

В третьем задании требовалось создать график одной из понравившихся математических формул, и добавить его в предыдущую лаюораторную работу через Gnuplot. Во время выполнения задания, я пользовался материалами официального сайта Gnuplot.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Таким образом, замена переменной (21.1) сводит интеграл

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right) dx \tag{13.3}$$

к интегралу от рациональной функции.

К рассмотренному типу интегралов относятся интегралы вида

$$\int R(x, (ax+b)^{r_1}, ..., (ax+b)^{r_n}) dx, \quad a \neq 0$$

в частности интегралы $\int R(x, x^{r_1}, ..., x^{r_n})dx$.

Пример. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. Сделаем согласно формуле (21.1) замену переменной $t^2 = x, t > 0$, откуда $dx = 2tdt$ и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2\int \frac{tdt}{1+t} = 2\int \frac{(1+t)-1}{1+t} dt = 2\left(\int dt - \int \frac{dt}{1+t}\right) =$$
$$= 2(t - \ln|1+t|) + C = 2(\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x}) + C.$$

К интегралам вида (13.3) иногда удается свести интегралы других типов, например, интегралы вида $\int R(x, \sqrt{x^2+x+q})dx$, когда квадратный трехчлен $x^2 + \ + q$ имеет действительные корни. В самом деле, если $x^2 + x + q = (x-a)(x-b)$, то

$$R(x, \sqrt{x^2+x+q}) = R(x, \sqrt{(x-a)(x-b)}) =$$
$$= R\left(x, |x-b|\sqrt{\frac{x-a}{x-b}}\right) = R_1\left(x, \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{1/2}\right),$$

где R_1 - рациональная функция. Поэтому

$$\int R(x, \sqrt{x^2+x+q}) = \int R_1\left(x, \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{1/2}\right)$$

и в правой части получился интеграл типа (13.3).

21.3*. Интегралы от дифференциального бинома. Рассмотрим интеграл вида

$$\int (a+bx^\beta)^\alpha x^\gamma dx; \tag{13.4}$$

его подынтегральное выражение называется *дифференциальным биномом.* Будем рассматривать случаи, когда α, β и γ являются рациональными, а a и b - произвольными действительными числами.

Сделаем в интеграле (13.4) замену переменной

$$x = t^{1/\beta}, \tag{13.5}$$

тогда $dx = \frac{1}{\beta} t^{1/\beta - 1} dt$ и, следовательно,

$$\int (a + bx^\beta)^\alpha x^\gamma dx = \frac{1}{\beta} \int (a + bt)^\alpha t^{(\gamma+1)/\beta - 1} dt. \qquad (13.6)$$

Таким образом, интеграл (13.4) с помощью подстановки (13.5) сводится к интегралу вида

$$\int (a + bt)^\alpha t^\lambda dt, \qquad (13.7)$$

где α и λ - рациональные числа, $\lambda = \frac{\gamma+1}{\beta} - 1$. Рассмотрим три случая.

1. α - простое число. Пусть $\gamma = m/n$, где m и $n > 0$ - целые числа. Согласно результатам п. 21.1 подстановка $u = t^{1/n}$ сводит интеграл (13.7) к интегралу от рациональной дроби.

2. γ - простое число. Пусть теперь $\alpha = m/n$, где m и $n > 0$ - целые числа. Тогда согласно тому же п. 21.1 интеграл (13.7) приводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $u = (a + bt)^{1/n}$.

3. $\alpha + \gamma$ - простое число. Пусть, как и выше, $\alpha = m/n$, где m и $n > 0$ - целые числа. Имеем $\int (a + bt)^\alpha t^\lambda dt = \int \left(\frac{a+bt}{t}\right)^\alpha t^{\alpha+\lambda} dt$.

Снова получился интеграл типа, рассмотренного в п. 21.1: подстановка $u = \left(\frac{a+bt}{t}^{1/n}\right)$ сводит его к интегралу от рациональной функции.

Итак, в трех случаях, когда α, λ или $\alpha + \lambda$ являются целыми числами, интеграл (13.7) сводится к интегралу от рациональных функций. Поэтому если хотя бы одно из чисел α, $\frac{\gamma+1}{\beta}$ или $\frac{\gamma+1}{\beta} + \alpha$ в первоначальном интеграле (13.4) является целым числом, то этот интеграл сводится к интегралу от рациональных функций и, следовательно, выражается через элементарные функции.

Русский математик П.Л. Чебышев показал, что ни в каком другом случае рациональных показателей α, β и λ интеграл (13.4) не выражается через элементарные функции.

§22. Интегрирование некоторых трансцендентных функций

22.1. Интегралы $\int R(sinx, cosx)dx$. Интеграл $\int R(sinx, cosx)dx$ сводится подстановкой

$$u = \tan \frac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi, \qquad (22.1)$$

к интегралу от рациональной функции. Действительно,

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$x = 2\arctan u, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2},$$

поэтому

$$\int R(sinx, cosx)dx = 2\int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2},$$

т.е. получился интеграл от рациональной функции.

При вычислении интегралов типа $\int R(sinx, cosx)dx$ часто оказываются полезными также и подстановки

$$u = \sin x, \quad u = \cos x, \quad u = \tan x. \tag{22.2}$$

В ряде случаев при интегрировании с помощью этих подстановок требуется провести меньше вычислений, чем при интегрировании с помощью подстановки (22.1).

Примеры. 1. Применим подстановку (22.1) для вычисления интеграла

$$\int \frac{dx}{1-\sin x}.$$

Имеем

$$\int \frac{dx}{1-\sin x} = 2\int du\left(1-\frac{2u}{1+u^2}\right)(1+u^2) = 2\int\frac{du}{1-u^2} = \frac{2}{1-u} + C =$$

$$= \frac{2}{1-\tan\frac{x}{2}} + C.$$

2. Для вычисления интеграла $\int\frac{dx}{\cos^6 x}$ применим подстановку $u = \tan x$:

$$\int\frac{dx}{\cos^6 x} = \int\frac{1}{\cos^4 x}d(\tan x) = \int(1+\tan^2 x)^2 d(\tan x) = \int(1+u^2)^2 du =$$

$$= \int(1+2u^2+u^4)du = u + \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C = \tan x + \frac{2\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + C.$$

22.2. Интегралы $\int\sin^m x\cos^n x dx$. В случае когда m и n - рациональные числа, интеграл $\int\sin^m x\cos^n x dx$ подстановкой $u = \sin x$ или $v = \cos x$ сводится к интегралу от иррациональной функции, а именно к интегралу от дифференциального бинома (п. 21.3*).

2.2 Задание 3

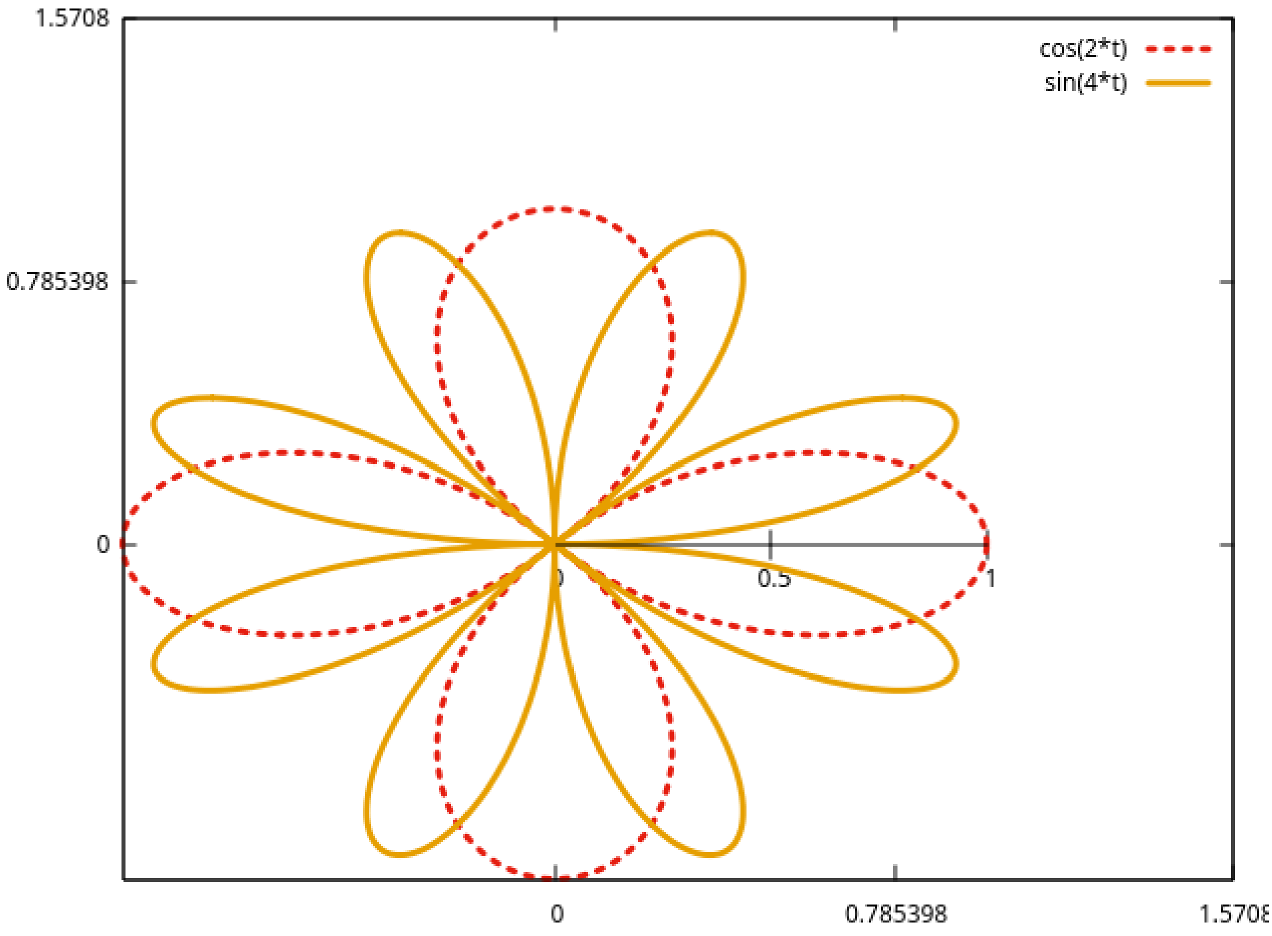

Рис. 1: Пример проекции