Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Лева Д. С. группа 22103 #

____
подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2022

Содержание

1 Описание работы

Во втором задании нужно было создать документ, содержащий математический текст, который предоставил учитель. В этом тексте нужно было набирать математические формулы, создавать рубрикации текста и специальные абзацы и оформлять новые окружения (теоремы, леммы и пр.) и команды. Разделы и нумерация формул были сделаны автоматически. Создание этого текста происходило с помощью системы LaTeX. Обучение пользованию этой системы изучалось из скринкастов и литературных источников, предоставленных учителем. В третьем задании с помощью интерпретатора команд gnuplot было построено изображение поверхности, а затем размещено в документе с текстом, который был создан во время второго задания. Обучение программе gnuplot также происходило с помощью скринкастов и литературных источников, предоставленных учителем.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

в п. 6.7); во-вторых,функции $x^k, k = 1, 2, ...$, также непрерывны на всей числовой оси (см. пример в п.7.3), а любой многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ является линейной комбинацией функций $1, x, x^2, ..., x^n$ с коэффициентами $a_0, a_1, ..., a_n$, поэтому, согласно следствию из свойств 6° пределов в п 6.7, он непрерывен на всей числовой оси $\triangleleft$.

Т е о р е м а 2 рациональная функция $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где P(x) и Q(x) - многочлены,непрерывна во всех точках числовой оси,в которых Q(x) $\neq$ 0.

$\triangleright$ Это сразу следует из непрерывности многочленов P(x) и Q(x) на всей числовой оси и непрерывности частного непрерывных функций во всех точках, в которых знаменнатель не обращается в нуль (см. следствие из свойства 6° пределов функций в п. 6.7).$\triangleleft$

8.2 Показательная и логарифмическая функции. Перечислим основные свойства степеней $a^r, a > 0$, с рациональными показателями r $\in$ Q (см. п. 2.1)

1°. *Пусть* $r_1 < r_2$. *Если* $a > 1$, *то* $a^{r_1} < a^{r_2}$,*а если* $a < 1$, *то* $a^{r_1} > a^{r_2}$

2°. $a^{r_1}a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$

3°. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1r_2}$

Эти свойства доказываются в курсе элементарной математики в предположении существования т однозначной определённости $a^r, a > 0$, а это было доказано в п. 7.3.

Вспомним ещё, что $a^r = 1$ и что $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

Из свойства 1° вытекает, что для любого r $\in$ Q выполняется неравенство $a^r > 0$. В самом деле, если $a \geq 1$ и $r \geq 0$, то по свойству 1° $a^r \geq a^0 = 1 > 0$. Отсюда следует, что $a^{-r} = \frac{1}{a^r} > 0$. Аналогично рассматривается случай $0 < a < 1$.

Нашей ближайшей задачей является определение значения выражения a^x для любого действительного числа x и $a > 0$.Затем будут изучены свойсва функции a^x.

Л е м м а 1 Для любого $a > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = 1 \tag{8.1}$$

С л е д с т и е 1 Для любого $a > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to 0, r\in Q} a^r = 1 \tag{8.2}$$

▷ Пусть сначала $a > 1$. Для любого $n \in N$ положим

$$x_n = a^{1/n} - 1 \tag{8.3}$$

Поскольку $\frac{1}{n} > 0$, то $a^{1/n} > a^0 = 1, ,$

$$x_n > 0, n = 1, 2, ... \tag{8.4}$$

Из (8.3) и (8.4) вытекакет, что

$$a = (1 + x_n)^n = 1 + nx_n + ... > nx_n.$$

Отсюда и из неравенства (8.3) получаем $0 < x_n < \frac{a}{n}$, а так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, что в силу (8.3) и означает что

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} \underset{(8.5)}{=} 1. \tag{8.5}$$

Если $a < 1$, то $b = \frac{1}{a} > 1$,и потому

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to\infty} b^{1/n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b^{1/n}} = 1.$$

Наконец, если $a = 1$,то утверждение (8.1) очевидно, так как

$$1^{1/n} = 1, n = 1, 2, ...$$

Из доказанного следует, что при любом a>0 имеет место и равенство

$$\lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n}} = 1. \ \triangleleft$$

Докажем следствие.

▷ Для всех $a > 0$ функция a^r монотонна на множестве рациональных чисел Q. Для каждого действительного числа x чисел $r < x$ и $r > x$ не пусты и точка x является их точкой прикосновения. Поэтому, согласно следствию из теоремы 4 п. 6.11, существуют односторонние пределы $\lim\limits_{n\to x-0} a^r$ и $\lim\limits_{n\to x+0} a^r$, $r \in Q$. В частности, указанные пределы существуют для $x = 0$. Согласно определению предела функции в терминах последовательностей их значения равны соответственно значению последовательностей a^{r_n} при любых последовательностях $a^{r_n} < 0$ и $a^{r_n} > 0$, стремящихся к нулю, $r_n \in Q$, n = 1,2,... Выбрав $r_n = -\frac{1}{n}$ и $r_n = \frac{1}{n}$, для которых пределы уже вычислены (см.(8.1)), в силу сказанного получим

$$\lim_{r\to -0} a^r = \lim_{r\to\infty} a^{-1/n} = 1, \lim_{r\to +0} a^r = \lim_{r\to\infty} a^{1/n} = 1, \qquad (8.6)$$

т.е. односторонние пределы в точке $x = 0$ функции $a^r, r \in Q, r \neq 0$, равны и, следовательно, согласно теореме 2 п. 6.6, сущетсвует двусторонний предел $\lim\limits_{r\to 0, r\neq 0} a^r = 1$. Он совпадает со значением $a^0 = 1$ функции a^r при $r = 0$, а поэтому (см. лемму 5 п. 6.9) она непрерывна в нуле:

$$\lim_{r\to 0, r\neq 0} a^r = a^0 = 1, r \in Q, a > 0.$$

Равенство (8.2) доказано. $\triangleleft$

Определение 1 *Пусть $a > 0$ и $x \in R$. Определим a^x как предел a^r по множеству рациональных чисел Q, когда $r \to x$, т.е.*

$$a^x \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{r\to x\\ r\in Q}} a^r \qquad (8.7)$$

Докажем, что это определение корректно, т.е. покажем, используя критерий Коши для предела функции (см. теорему 5 в п. 6.12), что предел (8.7) существует.

$\triangleright$ Пусть $a \geq 1$ и $x \in R$. В силу принципа Архимеда существует натуральное n такое, что

$$n > x \qquad (8.8)$$

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Согласно следствию леммы 1 существует такое $\delta > 0$, что для всех рациональных r, удовлетворяющих неравенству

$$r| < \delta \qquad (8.9)$$

выполняется неравенство

$$|a^r - 1| < \frac{\varepsilon}{a^n} \qquad (8.10)$$

Если это условие выполняется для некоторого $\delta > 0$, то оно заведомо выполняется и для всякого меньшего положительного δ. Поэтому указанное $\delta > 0$ можно всегда выбрать, чтобы выполнялось неравенство (см(8.8))

$$x + \frac{\delta}{2} < n \qquad (8.11)$$

Если рациональные числа $r^{'}$ и $r^{''}$ принадлежат $\frac{\delta}{2}$ окрестности точки x:

$$|r^{'} - x| < \frac{\delta}{2}, \quad |r^{''} - x| < \frac{\delta}{2}$$

и, следавательно,

$$r^{''} - r^{'} \leq |r^{''} - x| + |x - r^{'}| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \tag{8.12}$$

то, заменив, что $r^{'} < x + \frac{\delta}{2} \underset{(8.11)}{<}$, будем иметь

$$|a^{r^{''}} - a^{r^{'}}| = a^{r^{'}} |a^{r^{''} - r^{'}} - 1| \underset{\substack{(8.8) \\ (8.11)}}{<} a^{r^{n}} |a^{r^{''} - r^{'}} - 1| \underset{\substack{(8.9),(8.10) \\ (8.12)}}{<} a^{n} \frac{\varepsilon}{a^{n}} = \varepsilon.$$

Таким образом, для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из выполнения условий $|r^{'} - x| < \frac{\delta}{2}, |r^{''} - x < \delta|$ вытекакет неравенство

2.2 Задание 3

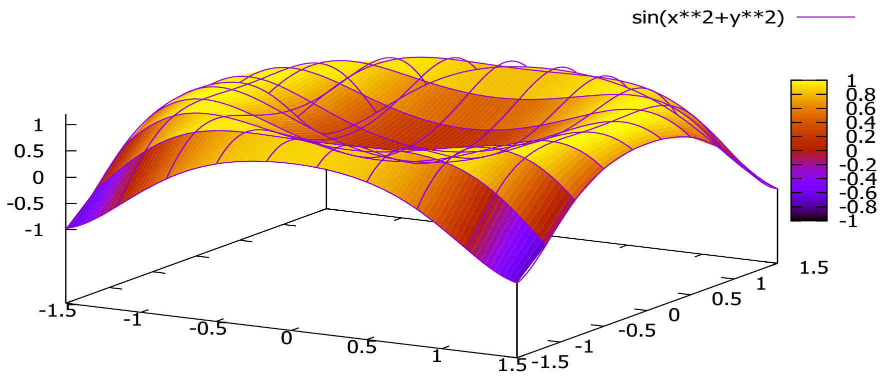

Рис. 1: График sin(x**2+y**2)