Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Федоров А. В. группа #22103

____
подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2022

Содержание

1 Описание работы

Первое задание было легчайшим, я просто добавил определение производной в файл и скомпидировал с помощью emacs и програмой dvipdfm. Второе задание очень долгое, но не сложное, мне пришлось создать теорему для замечания, и, в основном формулы состояли из комманд lim и int, предел и итеграл соответсвенно, с дополнителной коммандой для того, что бы цифры вставали, как на письме. Было много однообразных формул. Третье задание было простое, я нарисовал график Кардиоиды такими коммандами: set parametric
set trange [0 : 2*pi]
set terminal png
set output "cardioid.png"
plot 2*(1-cos(t))*cos(t),2*(1-cos(t))*sin(t)
Задав уравнение каридоиды параметрически. Далее я добавил график в текст второго задания, с помощью пакета graphicx, и командой caption задал ему подпись. Но для этого мне пришлось поспользоватся програмой pdflatex, вместо emacs и dvipdfm.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

1. $\alpha \neq 1$, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{\eta \to +\infty} \int\limits_1^{\eta} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{\eta \to +\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{если } \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha - 1} & \text{если } \alpha > 1 \end{cases}$ Итак, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

2. Формулы интегрального исчисления для несобственных интегралов. В силу свойства предела функций и определения значения несобственного интеграла как предела функции. Являющейся интегралом Римана с переменным пределом интегрирования, на собственные интегралы предельным переходом переносятся многие свойства определенного интеграла.

В дальнейшем в этом параграфе для простоты в вопросах теории будем рассматривать случай несобственного интеграла от функций, определенных на полуинтервале $[a, b)$ и интегрируемых по Риману на любом отрезке $[a, b]$, $-\infty < a \leq \eta < b \leq +\infty$, если, конечно, специально не оговорено что-либо другое.

Аналогичные опрелеления и теоремы для интегралов читатель без труда сформулирует самостоятельно.

Для общего несобственного интеграла утверждения, аналогичные тем, которые будут сформулированы ниже для интеграла, также справедливы и в случае необходимости могут быть сформулированы читателем.

1. Формула Ньютона-Лейбница. Если функция f непрерывна на промежутке $[a, b)$ и Φ — какая—либо ее первообразная, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b-0) - \Phi(a). \tag{1}$$

В этом равенстве либо обе части одновременно имеют смысл, и тогда они равны, либо они одновременно не имеют смысла, т. е. стоящие в них пределы не существуют. начало Справедливость формулы (1) следует из того, что для любого $\eta \in [a, b)$, согласно формуле Ньютона-Лейбница для интеграла Римана, имеет место равенство

$$\int\limits_a^\eta f(x)dx = \Phi(\eta) - \Phi(a) \tag{2}$$

Из него следует, что предел $\lim\limits_{\eta\to b}\int\limits_a^\eta f(x)dx$ существует тогда и только тогда, когда существует предел $\lim\limits_{\eta\to b}\Phi(\eta)$, причем, если эти пределы существуют, то перейдя в равенство (2) к пределу $\eta\to b$, получим формулу (1).

2. Линейность интеграла. Если несобственные интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$ сходятся,то для любых чисел λ и μ несобственный интеграл $\int\limits_a^b[\lambda f(x)+\mu g(x)]dx$ также сходится и

$$\int\limits_a^b[\lambda f(x)+\mu g(x)]dx=\lambda\int\limits_a^b f(x)dx+\mu\int\limits_a^b g(x)dx \tag{3}$$

Действительно, на основании соответсвующих свойств предела и линейности интеграла Римана имеем

$$\int\limits_a^b[\lambda f(x)+\mu g(x)]dx=\lim_{\eta\to b}\int\limits_a^\eta[\lambda f(x)+\mu g(x)]dx==\lim_{\eta\to b}[\lambda\int\limits_a^\eta f(x)dx+\mu\int\limits_a^\eta g(x)dx]=$$

$$=\lambda\int\limits_a^\eta f(x)dx+\mu\int\limits_a^\eta g(x)dx$$

3. Интегрирование неравенств. Если интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx\int\limits_a^b g(x)dx$ сходятся и для всех $x\int[a,b)$ выполняется неравенство $f(x)\le g(x)$ то

$$\int\limits_a^b f(x)dx\le\int\limits_a^b g(x)dx \tag{4}$$

В силу соответствующего свойства интеграла Римана для любого выполняется неравенство

$$\int\limits_a^\eta f(x)dx\le\int\limits_a^\eta g(x)dx$$

Перейдя в нем к пределу при $\eta\to b$, получим неравенство (4). Аналогичным образом, исходя из соответствующих свойств интеграла Римана, с помощью предельного перехода доказываются и следующие два свойства несобственных интегралов (проведение доказательств которых предоставляется читателю).

4. Правило замены переменной. Если функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $\Delta_x=[a,b)$, функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на полуинтервале $\Delta_t=[\alpha,\beta)$, $-\infty<\alpha<\beta\le+\infty$, и выполняются условия

$$\varphi(\Delta_t)\subset\Delta_x, a=\varphi(\alpha), b=\lim_{t\to\beta}\varphi(t),$$

то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \tag{5}$$

причем из существования интеграла, стоящего слева в этом равенстве, следует существование интеграла, стоящего справа.

Если функция φ такова, что обратная функция φ^{-1} однозначна и удовлетворяет условиям, аналогичным условиям, наложенным на функцию φ, и, следовательно, в интеграле, стоящем в правой части равенства (29.11), можно сделать замену переменной $t = \varphi^{-1}(x)$, то оба интеграла в этом равенстве сходятся или расходятся одновременно.

С помощью замены переменной из условий сходимости интегралов, рассмотренных в примерах, следует, что интегралы $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$,$-\infty < a < b < +\infty$, сходятся при $\alpha < 1$ и расходятся при $\alpha \geq 1$. В самом деле, первый интеграл с помощью замены переменной $t = x - a$, а второй с помощью $t = b - x$ приводятся к интегралу $\int\limits_0^{b-a} \frac{dt}{t^\alpha}$.

5. Правило интегрирования по частям. Если функции uv непрерывны на промежутке $[a, b)$, а их производные кусочно непрерывны на любом отрезке $[a, \eta)$, $a < eta < b$, то

$$\int\limits_a^b udv = \lim_{\eta\to b} \int\limits_a^\eta udv, \int\limits_a^\eta vdu = \lim_{\eta\to b} \int\limits_a^\eta vdu, uv\Big|_a^{b-0} = \lim_{\eta\to b} u(\eta)v(\eta) - u(a)v(a) \qquad (6)$$

следует существование оставшегося.

Замечание 1 *Отметим, что не все свойства интеграла Римана переносятся на несобственные интегралы. Например, интеграл от произведения двух функций может расходится в случае, когда интеграл от каждого из сомножителей сходится: если* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ *, то интеграл*

2.2 Задание 3

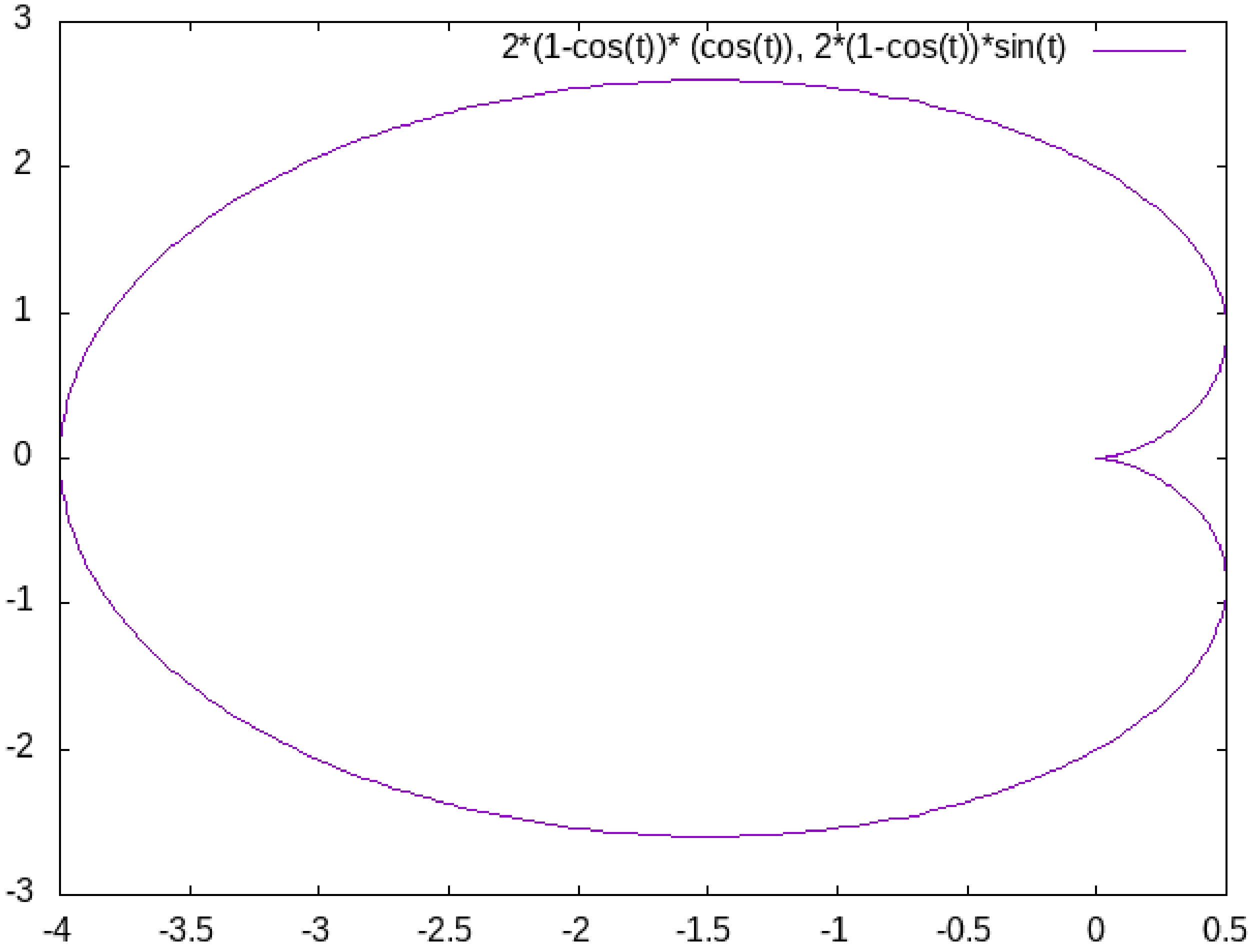

Рис. 1: Кардиоида