Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Брюсов А. Н. группа 22101#

____
подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2022

Содержание

1 Описание работы

Первое задание было самым простым, всё что надо было сделать - добавитьлюбое математическое опредление в уже готовый документ, я выбрал опредление производной. Я сначала не понял как скомпилировать файл, так как я был не очень знаком с emacs, но мне удалось найти хоткей в меню TeX.

Второе здание было очень долгим для выполнения, но никак не сложным, перепечатывать три страницы текста не самый быстрый процесс, но я справился достаточно быстро. Мне попался текст про правило Лопиталя, в котором не надо было использовать большое количество различных комманд, в основном это была комманда ,я и создал несколько своих комманд для ускорения набора. Мне очень сильно не понравилось, что файл надо компилировать два раза, чтобы ссылки появились.

Третье задание - очень простое, все что надо было сделать - использовать gnuplot, я решил нарисовать график астроиды. Для этого я использовал эти комманды: set parametric - я задам параметрическое уравнение
set trange [0 : 2*pi] - параметр принимает значаения от 0 до 2π
set terminal png - gnuplot выведет все в .png картинку
set output 'astroid.png' - задал назание файла
plot 3*(cos(t)**3), 3*(sin(t)**3) - рисую астроиду - ее параметрическое
уравнение - $x = R\cos^3 t, y = R\sin^3 t$
Далее я добавил картинку в файл второго задания, с помощью пакета graphicx и коммандой includegraphics в окружении figure, и подписал ее с помощью комманды caption.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

1. Если $\alpha > 0$ и $a > 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \tag{1}$$

т.е при $x \to +\infty$ любая степень $x^\alpha, \alpha > 0$, растет медленнее показательной функции с основанием, большим единицы. В самом деле, сдеулав указанные ниже преобразования и применив правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{a^{x/a}}\right)^\alpha = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{\alpha} a^{x/a} \ln a}\right)^\alpha =$$

$$\left(\frac{\alpha}{\ln a}\right)^\alpha - \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} a^x} = 0$$

2. Найдем $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$. Здесь отношение производных числителя и знаменателя

$$\frac{\left(x^2 \sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'} = \frac{2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

не стремится ни к какому пределу при $x \to 0$ и, следовательно, правило Лопиталя неприменимо. В этом случае предел находится непосредственно:

$$\lim_{x\to0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to0} \frac{x}{\sin x} \lim_{x\to0} \left(x \sin\frac{1}{x}\right) = 1 * 0 = 0$$

3. Предел неопределенностей типа 0^0, ∞^0 или 1^∞ можно найти, предварительно прологарифмировав функции, предел которых ищется. Например, чтобы найти предел $\lim\limits_{x\to+0} x^x$, найдем сначала предел

$$\lim_{x\to+0} \ln x^x = \lim_{x\to+0} x \ln x = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{1/x} = -\lim_{x\to+0} \frac{1/x}{1/x^2} = -\lim_{x\to+0} x = 0$$

Отсюда в силу непрерывности показательной функции будем иметь

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+0} x\ln x} = e^0 = 1$$

В частности, при $x = \frac{1}{n}$ получим

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1/n}} = 1$$

4. Пределы неопределенностей типов $0 * \infty$ $\infty - \infty$ целесообразно привести к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Например,

$$\lim_{x\to0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right) = \lim_{x\to0} \frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} =$$
$$\lim_{x\to0} \left(\frac{\sin x + x\cos x}{\sin x} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x}\right)$$

Предел первого сомножителя в правой части находится непосредственно:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x + x\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to0} \left(1 + \frac{x}{\sin x}\cos x\right) = 2$$

а предел второго – с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x} = \lim_{x\to0} \frac{x \sin x}{2x\sin x + x^2\cos x} = \lim_{x\to0} \frac{1}{2 + \frac{x}{\sin x}\cos x} = \frac{1}{3}$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right) = \dfrac{2}{3}$

1. Вывод формулы Тейлора Рассмотрим следующую задачу. Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производные до порядка n включительно. Требуется найти такой многочлен $P_n(x)$ степени не выше, чем n, что

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), k = 0, 1, \ldots, n, \tag{2}$$

$$r_n(x) \stackrel{def}{=} f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n), x \to x_0. \tag{3}$$

В случае $n = 1$ нам уже известно, что эта задача имеет решение и что ее решением является многочлен

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{4}$$

так как

$$P_1(x_0) = f(x_0), P_1'(x_0) = f'(x_0),$$
$$r_1(x) = f(x) - P_1(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) =$$
$$\Delta y - f'(x_0)\Delta x = \Delta y - dy = o(\Delta x), \Delta x \to 0,$$

где, как обычно, $\Delta x = x - x_0, \Delta y = f(x) - f(x_0)$

По аналогии с формулой (4) будем искать многочлен $P_n(x)$, удовлетворяющий условиям (2) и (3), в виде

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + x \cdots + a_n(x - x_0)^n. \tag{5}$$

Положив $x = x_0$, в силу условия (2) при $k = 0$ получим

$$a_0 = f(x_0) \tag{6}$$

Дифференцируя равество (5), будем иметь

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1}.$$

Положив $x = x_0$, в силу условия (2) при $k = 0$ получим

$$a_1 = f'(x_0) \tag{7}$$

Вообще, продифферецировав равенство (5) k раз

$$P_n^k = k!a_k + (k+1)\cdots 2a_{k+1}(x - x_0) + \cdots$$

$$\cdots + n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x - x_0)^{n-k},$$

и положив $x = x_0$, в силу условия (2) получим

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, k = 0, 1, \dots, n. \tag{8}$$

Таким образом, если кооэффициенты многочлена (5) выбраны согласно формулам (8), то этот многочлен удовлетворяет условию (2). Покажем, что он удовлетворяет и условию (3). Для этого прежде всего отметим, что в силу условий (2) для функции

$$r_n(x) \overset{def}{=} f(x) - P_n(x) \tag{9}$$

имеет место

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \cdots = r_n^{(n)}(x_0) = 0 \tag{10}$$

Из того, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную порядка n, вытекает, что у нее в некоторой окрестности этой точки существуют производные до порядка $n-1$ включительно и все производные функции $f(x)$, а следовательно, в силу равенства (9) и производные функции $r_n(x)$, до порядка $n-1$ включительно непрерывны в указанной точке x_0 и $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = r^{(k)}(x_0) \overset{=}{10}= 0, k = 0, 1, \dots, n-1$. применим сначала $n-1$ раз правило Лопиталя — теорему 2 из п.13.1, а затем оттуда же

2.2 Задание 3

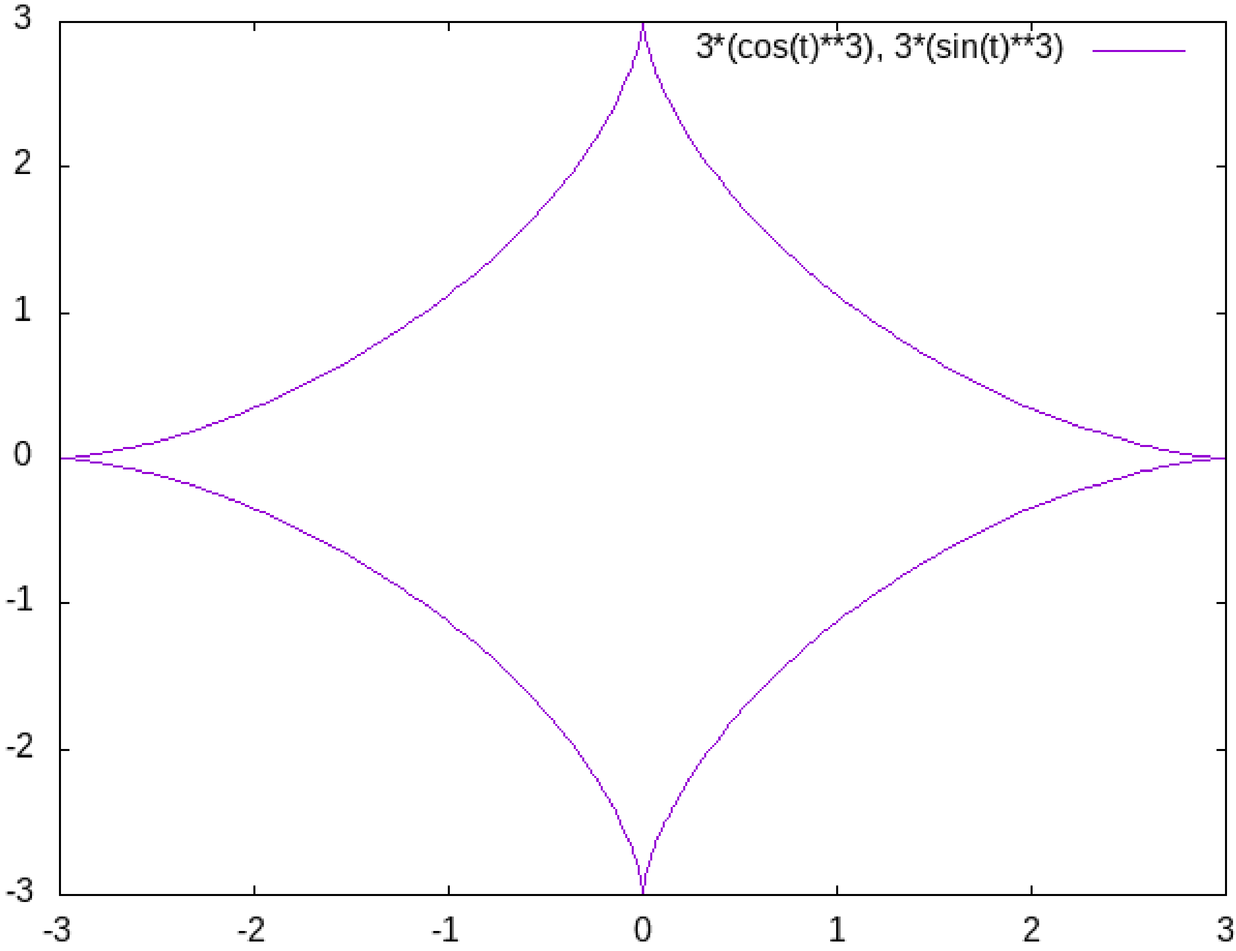

Рис. 1: Астроида