Петрозаводский государственный университет
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

01.03.01 – Математика

Профиль направления подготовки бакалавриата

Математика в образовании, фундаментальных и прикладных исследованиях

Отчет о практике

Компьютерные технологии в математике

Выполнила:
студентка 2 курса группы 22201

Зыбина Любовь Германовна ____________________
подпись

Место прохождения практики:
Кафедра информатики и математического обеспечения

Период прохождения практики:
04.02.22 – 23.05.22

Руководитель:
Богоявленская Ольга Юрьевна, кандидат технических наук, доцент

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск — 2022

Введение

Цель практики: Изучение систем LaTeX и Gnuplot

Задачи практики:

1. Освоить инструменты набора и трансляции математических текстов с помощью издательской системы LaTeX.

2. Овладеть инструментами построения научных графиков с помощью системы Gnuplot.

3. Подготовить рукопись конспекта изученных материалов и отчет по практике.

В этом документе можно посмотреть результат моей работы за весь период учебной практики: работу в системах LaTeX и Gnuplot. Отчет состоит из двух разделов - задания №2 и задания №3. В первой части (т.е. в задании №2) представлено несколько страниц документа с математическим текстом.

Вторая часть - пример построения графика с помощью системы Gnuplot и работы с изображениями в LaTeX.

1 Задание 2

где вектор $\boldsymbol{a}$ *определяется формулой* (16.19).

$$\triangleright \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}\underset{(16.19)}{=}\lim_{\Delta t\to 0}(\mathbf{a}+\frac{\mathbf{o}(\Delta t)}{\Delta t})=\mathbf{a}.\triangleleft$$

Верным является и обратное утверждение.

III. *Векторная функция, имеющая в некоторой точке производную, дифференцируема в этой точке.*

$\triangleright$ Если существует производная $\mathbf{r}'(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ и, следовательно, $\mathbf{r}'(t_0)=\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}+\varepsilon(\Delta t), \Delta t\neq 0$, где $\lim\limits_{\Delta t\to 0, \Delta t\neq 0}\varepsilon(\Delta t)=0$, то

$$\Delta \mathbf{r}=\mathbf{r}'(t_0)\Delta t+\varepsilon(\Delta t)\Delta t.$$

Полагая $\varepsilon(0)=\mathbf{0}$, получим, что условие $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\varepsilon(t)=0$ выполняется и без ограничения $\Delta t\neq 0$.

Таким образом, имеет место (16.22) при $\mathbf{a}=r'(t_0)$, т.е. функция $\mathbf{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0 и

$$d\mathbf{r}(t_0)=\mathbf{r}'(t_0)\Delta t.\triangleleft$$

По определению считается, что $dt\overset{\text{det}}{=}\Delta t$. Поэтому (опуская для простоты обозначения аргумента) имеем $d\mathbf{r}=\mathbf{r}'dt$, или $\mathbf{r}'=\frac{d\mathbf{r}}{dt}$.

IV. *Если* $t=t(\tau)$ *- дифференцируемая в точке* τ_0 *числовая функция, а* $\boldsymbol{r}(t)$ *- дифференцируемая в точке* $t_0=t(\tau_0)$ *векторная функция, то сложная функция* $\boldsymbol{r}(t(\tau))$ *дифференцируема в точке* τ_0 *и*

$$\boldsymbol{r}'_\tau(t(\tau_0))=\boldsymbol{r}'_t(t_0)t'_\tau(\tau_0),$$

или, короче

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau}. \tag{16.23}$$

$\triangleright$ Из соотношения (16.22) имеем при $\Delta\tau\neq 0$

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta \tau}=r'_t\frac{\Delta t}{\Delta \tau}+\varepsilon(\Delta t)\frac{\Delta t}{\Delta \tau}. \tag{16.24}$$

По условию функция $t=t(\tau)$ дифференцируема в точке τ_0, т.е. существует конечный предел

$$\lim_{\Delta \tau\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta \tau}=t'(\tau_0). \tag{16.25}$$

Отсюда следует, что эта функция в рассматриваемой точке непрерывна:

$$\lim_{\Delta\tau\to 0} \Delta t = 0.$$

Отсюда и из условия (16.21) вытекает, что $\lim\limits_{\Delta\tau\to 0} \varepsilon(\Delta t) = \mathbf{0}$.

Из всего сказанного следует, что при $\Delta\tau \to 0$ правая часть равенства (16.24), а следовательно, и его левая часть имеют конечный пределы. Это означает, что в точке τ_0 существует производная $\mathbf{r}'_\tau$ и что

$$\mathbf{r}'(t(\tau_0)) = \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta\tau\to 0} [\mathbf{r}'(t_0)\frac{\Delta t}{\Delta\tau} + \varepsilon(\Delta t)\frac{\Delta t}{\Delta\tau}] = \mathbf{r}'_t(t_0)t'_\tau(\tau_0). \triangleleft$$

Из формулы (16.23) аналогично случаю скалярных функций вытекает инвариантность записи дифференциала векторной функции: как для зависимой переменной t, так и для независимой τ имеем

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'_t dt,\ d\mathbf{r} = \mathbf{r}'_\tau d\tau, \tag{16.26}$$

т.е. чтобы из второй формулы получить первую, надо подставить во вторую формулу $\mathbf{r}'_\tau = \mathbf{r}'_t \cdot t'_\tau$ и заметить, что $t'_\tau d\tau = dt$.

V. *Для производных вектор-функций имеет место формулы, аналогичные соответствующим формулам для скалярных функций:*

$$(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)' = \mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_2,$$

$$(f\mathbf{r})' = f'\mathbf{r} + f\mathbf{r}',$$

$$(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)' = \mathbf{r}'_1\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1\mathbf{r}'_2,$$

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)' = \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}'_2.$$

Здесь все производные берутся в одной и той же точке. Предполагается, что производные, стоящие в правой части каждого равенства, существуют, и утверждается, что в этом случае существуют и производные, находящиеся в левых частях равенств.

$\triangleright$ Доказываются эти формулы аналогично скалярному случаю. Докажем, например, последнюю из них.

Заметив, что $\mathbf{r}_1(t_0+\Delta t)=\mathbf{r}_1(t_0)+\Delta\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2(t_0+\Delta t)=\mathbf{r}_2(t_0)+\Delta\mathbf{r}_2$, получим

$$(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)'\Big|_{t=t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}_1(t_0+\Delta t)\times\mathbf{r}_2(t_0+\Delta t)-\mathbf{r}_1(t_0)\times\mathbf{r}_2(t_0)}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\mathbf{r}_1(t_0)+\Delta\mathbf{r}_1)\times(\mathbf{r}_2(t_0)+\Delta\mathbf{r}_2)-\mathbf{r}_1(t_0)\times\mathbf{r}_2(t_0)}{\Delta t}=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}(\frac{\Delta\mathbf{r}_1}{\Delta t}\times\mathbf{r}_2(t_0)+\mathbf{r}_1(t_0)\times\frac{\Delta\mathbf{r}_2}{\Delta t}+\frac{\Delta\mathbf{r}_1}{\Delta t}\times\Delta\mathbf{r}_2)=$$

$$=\mathbf{r}_1'(t_0)\times\mathbf{r}_2(t_0)+\mathbf{r}_1(t_0)\times\mathbf{r}_2'(t_0).\triangleleft$$

Для дальнейшего нам будет полезна следующая

Лемма. *Если вектор-функция $\boldsymbol{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0 и все векторы $\boldsymbol{r}(t)$ имеют одну и ту же длину в некоторой окрестности точки t_0, то производная $\boldsymbol{r}'(t_0)$ ортогональна вектору $\boldsymbol{r}(t_0)$:*

$$\mathbf{r}'(t_0)\mathbf{r}(t_0)=0. \tag{16.27}$$

$\triangleright$ Действительно, если в указанной окрестности $|\mathbf{r}(t)|=c$, где c – константа, то $|\mathbf{r}|^2=c^2$, т.е. $\mathbf{r}^2=c$. Дифференцируя это равенство, получим $2\mathbf{r}\mathbf{r}'=0$, что равносильно равенству (16.27). $\triangleleft$

Утверждение леммы содержательно лишь в случае, когда $\mathbf{r}'(t_0)\neq 0$ (если $\mathbf{r}'(t_0)=0$, то условие (16.27), очевидно, выполняется и без условия постоянства длины вектора $\mathbf{r}(t)$). В этом случае физический смысл формулы (16.27) состоит в том, что у материальной точки, движущейся по поверхности шара ($\mathbf{r}(t)$ – радиус-вектор этой точки, $\mathbf{t}$ – время движения, c – радиус указанного шара), скорость $\mathbf{v}=\frac{dr}{dt}$ всегда направлена при $\mathbf{v}\neq 0$ по касательной к поверхности шара, т.е. перпендикулярно радиусу шара.

Производные высших порядков для вектор-функции определяются по индукции: если у вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ в некоторой окрестности точки t_0 задана производная $\mathbf{r}^{(n)}(t)$ порядка n, $n=0,1,2,\dots$ ($\mathbf{r}^{(0)}(t)\stackrel{\text{det}}{=}\mathbf{r}(t)$), то производная порядка $n+1$ в этой точке (если эта производная, конечно, существует) определяется по формуле

$$\mathbf{r}^{(n+1)}(t_0)=(r^{(n)}(t))'\Big|_{t=t_0}.$$

Если векторная функция имеет в некоторой точке n производных, то говорят также, что она в этой точке *n раз дифференцируема.* Можно и для векторных по аналогии со скалярным ввести понятие дифференциалов высших порядков, но не будем на этом останавливаться.

Если векторная функция $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ n раз дифференцируема в точке $t = t_0$, то в некоторой окрестности этой точки для функции $\mathbf{r}(t)$ имеет место формула

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbf{r}^{(k)}(t_0)}{\Delta t^k} + \mathbf{o}(\Delta t^n), \Delta t \longrightarrow 0,$$

называемая по аналогии со скалярным случаем *формулой Тейлора (порядка n)* функции $\mathbf{r}(t)$ *с остаточным членом в виде Пеано.* Эта формула непосредственно следует из разложений по формуле Тейлора координат $x(t), y(t), z(t)$ векторной функции $\mathbf{r}(t)$.

Из всего сказанного видно, что рассмотренные определения и утверждения для векторных функций получаются перенесением соответствующих определений и утверждений из теории скалярных функций.

Замечание 3. *Следует, однако, иметь в виду, что не все, что справедливо для скалярных функций, имеет прямой аналог в векторном случае. Это относится, например, к теореме Ролля, а следовательно, и к теореме Лагранжа, частным случаем которой является теорема Ролля.*

2 Задание 3

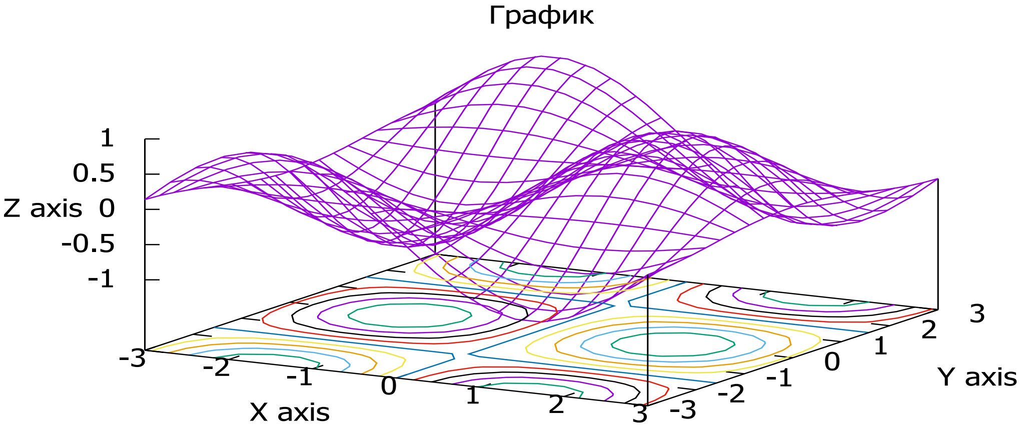

Рис. 1 – Пример изображения поверхности в декартовых координатах

Список литературы

1. Котельников, И. А. LaTeX по-русски [Электронный ресурс]. / И. А. Котельников, П. З. Чеботаев. — 3-е изд., перераб. и доп. — Новосибирск: Сибирский хронограф, 2004. — 496 с.

2. Львовский, С.М. Работа в системе LaTeX : курс / С.М. Львовский ; Национальный Открытый Университет "ИНТУИТ". - Москва : Интернет-Университет Информационых Технологий, 2007. - 465 с. ;

3. Gnuplot Homepage : [Электронный ресурс]. - URL: http://gnuplot.info