Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Зубко И. А. группа 22103

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Петрозаводск – 2022

Содержание

1 Описание работы

В первом задании я научился правильно настраивать шрифты, пакеты, кодировку символов. Также я научился добавлять абзацы, в которых применял два специальных символа и одну группу.

В задании номер два я выполнил подготовку математического документа, содержащего математический текст, при помощи издательской системы Latex. В качестве источника выступала книга "Краткий курс математического анализа". Вспомогательными инструментами для выполнения задания являлись скринкасты и другие литературные источники.

В задании номер три я построил график с помощью системы для интерпретатора команд Gnuplot и впоследствии я разместил изображение построенной кривой, в декартовой системе координат, в документе подготовленном во время выполнения второго задания. Вспомогательными инструментами для выполнения задания являлись скринкасты и электронный ресурс "Gnuplot Homepage".

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

то $\lim\limits_{t\to t_0} |\mathbf{a}\times\beta(t)+\alpha(t)\times\mathbf{b}+\alpha(t)\times\beta(t)|=0.$

Отсюда в силу (16.16) имеем , что $\lim\limits_{t\to t_0} |r_1(t)\times r_2(t)-\bar{a}\times\bar{b}|=0$, что согласно определению 1 (см.(16.2)) и доказывает свойство 5°. $\triangleleft$

Из свойств пределов векторных функций и опрелеления их непре- рывности следует, что сумма, скалярное и векторное произведения векторных функций, а также произведение скалярных функций на векторные непрерывны в некоторой точке, если в этой точке непрерывны все слагаемые или соответственно сомножители.

16.2. Производная и дифференциал векторной функции. Пусть векторная функция r(t) задана в некоторой окрестности точки t_0; тогда соотношение $\frac{r(t)-r(t_0)}{t-t_0}$ определено в соответствующей проколотой окрестности точки t_0.

Определение 3. Предел $\lim\limits_{\triangle t\to 0}\frac{r(t)-r(t_0)}{t-t_0}$ (если он конечно, существует) называется *производной векторной функции* r(t) в точке t_0 и обозначается r'(t_0) или $\dot{r}(t_0)$.

Если положить $\triangle t=t-t_0$,$\triangle r=r(t)-r(t_0)=r(t_0+\triangle t)-r(t_0)$, то

$$r'(t_0)\overset{\mathrm{def}}{=}\lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle r}{\triangle t}. \tag{16.17}$$

Пусть $r(t)=(x(t),y(t),z(t))$. Так как

$$\frac{r(t)-r(t_0)}{t-t_0}=(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0},\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0},\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}),$$

то в силу (16.9), (16.10) для того, чтобы векторная функция r(t) $=$ $=(x(t),y(t),z(t))$ имела производную в точке t_0 , необходимо и достаточно, чтобы ее координаты $x(t),y(t),z(t)$ имели производные в точке t_0, причем в этом случае

$$r'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)). \tag{16.18}$$

Производную $r'(t)$ вектор-функции $r(t)$ называют также *скоростью изменения вектора* $r(t)$ относительно параметра t. В случае когда длина вектора $r(t)$ не меняется, производная $r'(t)$ называется также и *скоростью вращения вектора* $r(t)$, а ее абсолютная величина — *численным значением* скорости его вращения.

Замечание 1. По аналогии со случаем скалярных функций векторную функцию $\alpha(t)$, $t\in X$, называют *бесконечно малой* по сравнению со скалярной функцией $\beta(t)$, $t\in X$, при $t\to t_0$ и пишут $\alpha(t)=$ $=o(\beta(t))$, $t\to t_0$, если существует векторная функция $\varepsilon(t)$, определенная на том же множестве X, что и функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, такая, что в некоторой окрестности точки $t = t_0$ имеет место равенство $\alpha(t) = \varepsilon(t)\beta(t)$, $t \in X$, и

$$\lim_{t \to t_0} \varepsilon(t) = 0.$$

Как и для скалярных функций, если $t_0 \in X$, то функция $\varepsilon(t)$ непрерывна в точке t_0 , и потому $\varepsilon(t_0) = \mathbf{0}$.

З а м е ч а н и е 2. Вектор-функция аргумента t называется *линейной*, если она имеет вид $\mathbf{a}t + \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — какие-либо два фиксированных вектора.

После этих вводных замечаний можно определить понятие дифференцируемости и дифференциала вектор-функции

О п р е д е л е н и е 4. Вектор-функция $r(t)$, заданная в некоторой окрестности точки t_0, называется *дифференцируемой* при $t = t_0$, если ее приращение $\triangle r = \mathrm{r}(t_0 + \triangle t)$ - $r(t_0)$ в точке t_0 представимо в виде

$$\triangle r = a\triangle t + o(\triangle t), \quad \triangle t \to 0 \tag{16.19}$$

При этом линейная вектор-функция a$\triangle t$ приращения аргумента $\triangle t$ называется *дифференциалом функции* $\mathbf{r}(t)$ в точке t_0 и обозначается через $d\mathbf{r}$, т.е. $d\mathbf{r} = \mathbf{a}\triangle t$.

Таким образом,

$$\triangle r = d\mathbf{r} + \mathbf{o}(\triangle t), \quad \triangle t \to 0. \tag{16.20}$$

Здесь функция $\mathbf{o}(\triangle t)$ определена при $\triangle t = 0$; в этой точке она равна нулю:

$$\mathbf{o}(\triangle t)|_{\triangle t=0} = (\triangle r - a\triangle t)|_{\triangle t=0} = \mathbf{0}.$$

Следовательно, если представить эту функцию $\mathbf{o}(\triangle t)$ в виде (см. замечание 1) $\mathbf{o}(\triangle t) = \varepsilon(\triangle t)\triangle t$ то функция $\varepsilon(\triangle t)$ также будет определена при $\triangle t = 0$, а поэтому, как было отмечено выше, в этом случае $\varepsilon(0) = \mathbf{0}$. Благодаря этому здесь предел

$$\lim_{\triangle t \to 0} \varepsilon(\triangle t) = \mathbf{0}. \tag{16.21}$$

рассматривается не по проколотой, а по целой окрестности точки $\triangle t = 0$.

Формулу (16.19) теперь можно записать в виде

$$\triangle r = a\triangle t + \varepsilon(\triangle t)\triangle t, \quad \lim_{\triangle t \to 0} \varepsilon(\triangle t) = \mathbf{0}. \tag{16.22}$$

Докажем несколько простых утверждений о дифференцируемых векторных функциях, аналогичных соответствующим утверждениям для скалярных функций.

I. *Если векторная функция дифференцируема в некоторой точке, то она и непрерывна в этой точке.*

$$\triangleright \quad \lim_{\triangle t\to 0}\triangle r \underset{(16.22)}{=} \lim_{\triangle t\to 0}(a\triangle t+\epsilon(\triangle t)\triangle)=0. \triangleleft$$

II. *Если векторная функция r(t) дифферинцируема в точке t_0, то она имеет в этой точке производную и*

$$r'(t_0)=a,$$

где вектор a определяется формулой (16.19).

$$\triangleright \quad \lim_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle r}{\triangle t} \underset{(16.19)}{=} \lim_{\triangle t\to 0}\frac{(a+o(\triangle t))}{(\triangle t)}=a. \triangleleft$$

Верным является и обратное утверждение.

III.*Векторная функция, имеющая в некоторой точке производную, дифференцируема в этой точке.*

$\triangleright$ Если существует производная $r'(t_0)=\lim\limits_{\triangle t\to 0}\frac{\triangle r}{\triangle t}$ и, следовательно, $r'(t_0)=\frac{\triangle r}{\triangle t}+\varepsilon(\triangle t), \quad \triangle t\neq 0$, где $\lim\limits_{\triangle t\to 0,\triangle t\neq 0}\varepsilon(\triangle t)=0,$ то

$$\triangle r=r'(t_0)\triangle t+\varepsilon(\triangle t)\triangle t.$$

Пологая $\varepsilon(0)=\mathbf{0}$, получим, что условие $\lim\limits_{\triangle t\to 0}\varepsilon(0)=0$ выполняется и без ограничения $\triangle t\neq 0$.

Таким образом, имеет место (16.22) при а $=r'(t_0)$, т.е. функция $r(t)$ дифференцируемая в точке t_0 и

$$dr(t_0)=r'(t_0)\triangle t. \triangleleft$$

По определению считается, что $dt\overset{\text{def}}{=}\triangle t$.Поэтому (опуская для простоты обозначения аргумента) имеем $dr=r'dt$, или $r'=\frac{dr}{dt}$.

IV. *Если $t=t(\tau_i)$ - дифференцируемая в точке τ_0 числовая функция, а r(t) - дифферинцируемая в точке $t_0=t(\tau_0)$ векторная функция, то сложная функция $r(t(\tau_i))$ дифференцируемая в точке τ_0 и*

$$r'_\tau(t(\tau_0))=r'_t(t_0)t'_\tau(\tau_0),$$

или, короче

$$\frac{dr}{d\tau}=\frac{dr}{dt}\frac{dt}{dr}. \tag{16.23}$$

$\triangleright$ Из соотношения (16.22) имеем при $\triangle\tau_i\neq 0$

$$\frac{\triangle t}{\triangle\tau}=r'_t\frac{\triangle t}{\triangle\tau}+\varepsilon(\triangle t)\frac{\triangle t}{\triangle\tau}. \tag{16.24}$$

По условию функция $t=t(\tau)$ дифференцируемая в точке τ_0, т. е. существует конечный предел

$$\lim_{\triangle\tau\to 0}\frac{\triangle t}{\triangle\tau}=t'(\tau_0). \tag{16.25}$$

Отсюда следует, что эта функция в рассматриваемой точке непрерывна:

$$\lim_{\triangle\tau\to 0} \triangle t = 0.$$

отсюда и из условия (16.21) вытикает, что $\lim\limits_{\triangle\tau\to 0} \varepsilon(\triangle t) = 0.$

2.2 Задание 3

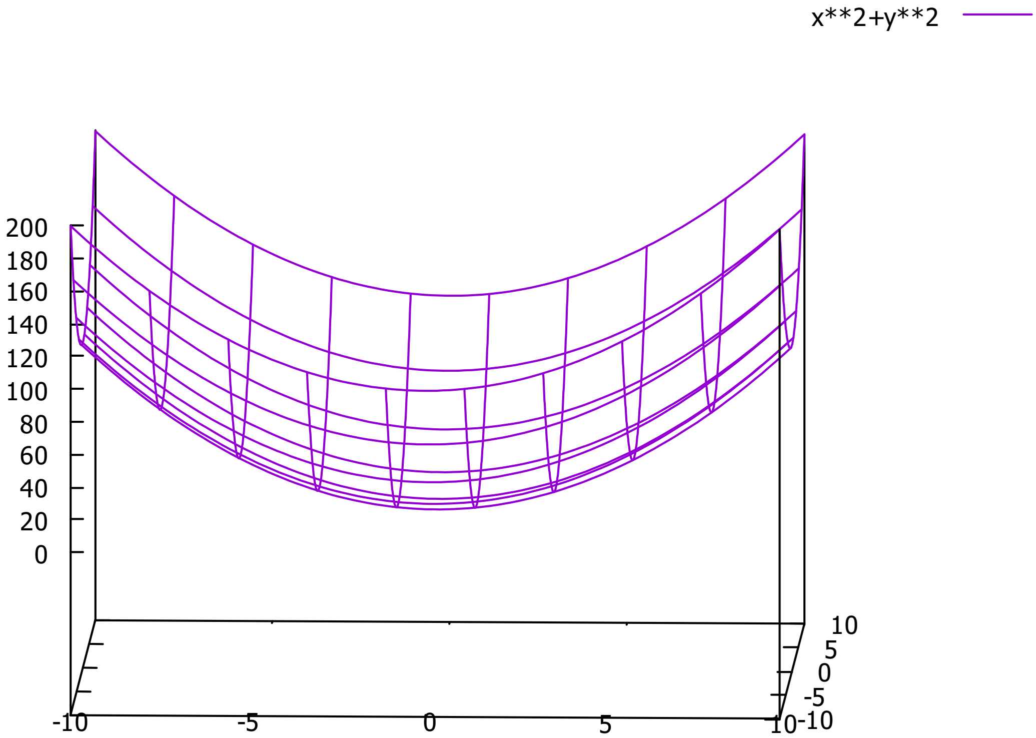

Рис. 1: Параболоид