Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Жербин Р.И. группа 22101

____
подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2022

Содержание

1 Описание работы

1.1 Общее описание

На данной учебной практике я освоил инструменты набора и трансляции математических текстов с помощью издательской системы LaTeX,а также овладел инструментами построения научных графиков с помощью системы Gnuplot.

1.2 Задание 2

Во втором задании мне было необходимо подготовить докумет, содержащий математический текст. При работе в системе LaTeX я научился набору математических формул(получил знания о: основных видах формул; комманд для расположении их в тексте; спецзнаках, используемых для их написания), рубрикации текста и использованию специальных абзацев(команды создания разделов, отдельных абзацев и их нумерации), а также оформлению новых окружений(команды для создания лемм, теорем и т.д.)

1.3 Задание 3

В третьем задании передо мной стояла задача построить изображение кривой в декартовых координатах с помощью системы Gnuplot, а затем разместить его в файле с предыдущем заданием. Я разобрался с командами для построения графиков и окружением для их вставки в документ типа *.tex*.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Теорема 1 *Отображение $f : G \longrightarrow R$ открытого множества $G \subset R^m$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз всякого открытого множества является открытым множеством.*

$\triangleright$Если отображение f непрерывно на открытом множестве G, V— открытое в R^m множество и $x \in f^{-1}(V)$, то V является окрестностью точки $y = f(x) \in V$. Согласно лемме существует такая окрестность U точки x, что $f(U) \subset V$ и, следовательно, $U \subset f^{-1}(V)$, т.е. для каждой точки прообраза $f^{-1}(V)$ открытого множества V существует её окрестность, содержащаяся в этом прообразе. Это и означает, что множество $f^{-1}(V)$ является открытым.

Пусть теперь при отображении f прообраз всякого открытого множества — открытое множество и $x \in G$. Тогда какова бы ни была окрестность V точки $f(x)$ она, будучи открытым множеством, имеет своим прообразом

$$U = f^{-1}(V) \tag{1}$$

также открытое множество, которое поэтому и является окрестностью точки $x \in V$. Из равенства (1) следует, что $f(U) = V$,и, следовательно, отображение f непрерывно в точке $^{(0)} \in G$.$\triangleleft$

Теорема 2 *Отображение $f : X \longrightarrow R$ замкнутого множества $X \subset R^n$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз всякого замкнутого множества является замкнутым множеством.*

$\triangleright$Пусть отображение f непрерывно на замкнутом множестве X, Y — замкнутое множество в пространстве R^m — точка прикосновения прообраза

$$f^{-1}(Y) \subset X \tag{2}$$

множества Y:

$$x \in \overline{f^{-1}(Y)} \tag{3}$$

Множество X замкнуто: $X = \overline{X}$, поэтому

$$x \underset{(3)}{\in} \overline{f^{-1}(Y)} \underset{(2)}{\subset} \overline{X} = X$$

и, следовательно, отображение f определено в точке .

Покажем, что $f(x) \subset Y$. Из того, что — точка прикосновения множества $f^{-1}(Y)$, следует, что существует такая последовательность точек

$$x^{(k)} \subset f^{-1}(Y), k = 1, 2, \dots \tag{4}$$

что

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x$$

Последовательность $y^{(k)} = f(x^{(k)}), k = 1, 2, \dots$ имеет предел, так как в силу непрерывности отображения f в точке имеем

$$\lim_{k \to \infty} y^{(k)} = \lim_{k \to \infty} f(x^{(k)}) = f(x) \tag{5}$$

Поскольку множество Y замкнуто и $y^{(k)} = f(x^{(k)}) \subset Y$,то $f(x) \underset{(5)}{\subset} Y$, а следовательно, $x \subset f^{-1}(Y)$. Это и означает замкнутость множества $f^{-1}(Y)$.

Пусть теперь $f : X \longrightarrow R^m$ — отображение замкнутого множества $X \in R^n$, при котором прообраз всякого замкнутого множества также является замкнутым множеством. Пусть $x \subset X$ и V — какая-либо окрестность точки $y = f(x)$ в пространстве R^m. Поскольку V открытое множество, то множество $R^m \setminus V$являются замкнутыми, следовательно, замкнутым будет и его прообраз $f^{-1}(R^m \setminus V)$. Поэтому дополнение $U = R^n \setminus f^{-1}(R^m \setminus V)$ в пространстве R^n этого прообраза является открытым множеством. Поскольку $f(x) \in U$, то $f(x) \notin R^m \setminus V$. Поэтому $x \notin f^{-1}(R^m \setminus V)$, следовательно, $x \in R^n \setminus f^{-1}(R^m \setminus V) = U$.Множество U, будучи открытым множеством, является окрестностью точки x.

Из равенства $U = R^n \setminus f^{-1}(R^m \setminus V)$ имеем $f(U \cap X) \cap (R^m \setminus V) = \varnothing$, т.е. $f(U \cap X) \subset V$. Это означает, что отображение f непрерывно в точке x.$\triangleleft$

§ 36. Частные производные. Дифференцируемость функций многих переменных

36.1.Частные производные. Пусть функция $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Тогда, например, *частной производной* $\frac{\delta f}{\delta x_1}$ в точке $x^{(0)}$ называется обычная производная $\frac{df}{dx_1}$ в точке $x_1^{(0)}$ функции, получающейся из данной фиксированием всех аргументов:$x_2 = x_2^{(0)}, \dots, x_n = x_n^{(0)}$ кроме первого, т.е. функции $f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ Таким образом,

$$\frac{\delta f(x^{(0)})}{\delta x_1} \overset{def}{=} \frac{df(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{dx_1}|_{x_1 = x_1^{(0)}}.$$

Вспомнив определение производной функции одной переменной и положив

$$\Delta x_1 = x_1 - x_1^{(0)}, \Delta_{x_1} f(x^{(0)}) \overset{def}{=} f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}),$$

получим

$$\frac{\delta f(x^{(0)})}{\delta x_1} = \lim_{\Delta_{x_1} \to 0} \frac{\Delta_{x_1} f(x^{(0)})}{\Delta x_1}$$

($\Delta_{x_1} f(x^{(0)}$ называется *приращением функции* f *в точке* $x^{(0)}$ *по переменной* x_1).Правильнее было бы писать не $\frac{\delta f(x^{(0)})}{\delta x_1}$, а $\frac{\delta f}{\delta x_1}(x^{(0)})$,так как $\frac{\delta f}{\delta x_1}$ есть единый символ для обозначения частной производной, но обычно по традиции употребляется первое обозначение. Аналогично определяются частные производные функции f по другим переменным $x_2, \ldots, x_n$. Отметим, что из существования у функции всех частных производных в точке не следует непрерывность этой функции в рассматриваемой точке. Это естественно, так как существование частных производных в данной точке накладывает ограничения на поведение функции в окрестности точки лишь в направлении координатных осей, в то время как в определении непрерывности функции содержится требование к поведению функции при приближении аргументак точке произвольным образом. Это подтверждается примером функции

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, \text{если} xy = 0 \\ 1, \text{если} xy \neq 0 \end{cases}$$

Эта функция имеет в точке (0, 0) частные производные

$$\frac{\delta f(0,0)}{\delta x} = \frac{\delta f(0,0)}{\delta y} = 0$$

(функция f постоянна на координатных осях — она на них равна тождественно нулю), но не является непрерывной в этой точке, так как, например, ее предел по биссектрисе $x \equiv y$ первого координатного угла при $(x, x) \to (0, 0), x \neq 0$, не равен ее значению в точке (0,0):

$$\lim_{\substack{0<i<m \\ 0<j<n}} f(x, x) = 1 \neq 0 = f(0, 0).$$

В заключение отметим, что частные производные $\frac{\delta f}{\delta x_1}$ обозначаются также символами f'_{x_i}, f_{x_i} и $D_{x_i} f$. Аналогично случаю обычной производной для функции одной переменной определяется понятие односторонних частных производных.

36.2. Дифференцируемость функций многих переменных. Определим сначала для простоты записи понятие дифференцируемости функции для случая функции двух переменных. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой δ-окрестности $U = U(M_0; \delta)$ точки $M_0 = (x_0, y_0)$. Для точки $M = (x, y)$ положим $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0, p = p(M, M_0) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.Тогда условие $M \in U(M_0; \delta)$ можно записать в виде $p < \delta$. Пусть

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0);$$

Δz называется *(полным) приращением функции* f *в точке* $M = (x_0, y_0)$.

2.2 Задание 3

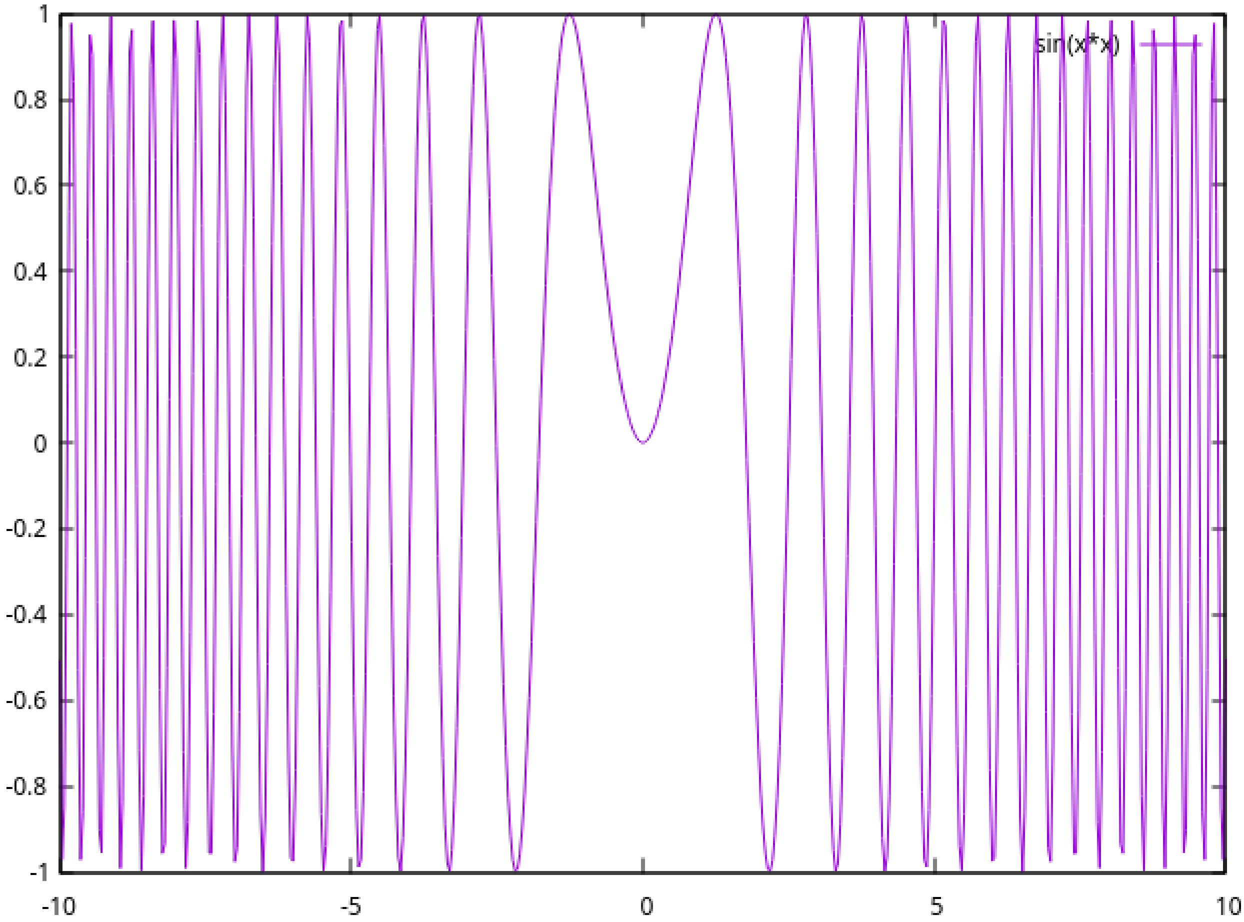

Рис. 1: $sin(x^2)$