Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Юшков А. А. группа 22103

____
подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2022

Содержание

1 Описание работы

В первом задании я научился настраивать шрифты, пакеты, кодировку символов. Также я научился добавлять абзацы и спецсимволы.

Вторым же заданием была подготовка математического документа, содержащего 3 страницы математического текста из книги, под названием "Краткий курс математического анализа". Для выполнения этого задания я полбзовался статьями на Хабре и другими интернет-ресурсами.

В третьем задании я построил график с Gnuplot и разместил его в документе, который был мной написан во время выполнения второго задания. Для выполнения этого задания я пользовался темиже источниками, что и в прошлый раз.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Теорема 5 *(признак Дирихле-Харди*). Если последовательность функции $a_n(x) \in \mathbb{R}, n = 1, 2, ...,$ равномерно сремится на множестве X к нулю, т.е.*

$$a_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} 0, \tag{31.22}$$

и в каждой точке $x \in X$ монотонна, а последовательность функций $b_n(x) \in C, n = 1, 2, ..., x \in X$ такова, что последовательность частичных сумм ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) \tag{31.23}$$

ограничена на X, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \tag{31.24}$$

равномерно сходится на X.

$\triangleright$ Согласно условию последовательность частичных сумм

$$B_n(x) = b_1(x) + ... + b_n(x), \quad n = 1, 2, ...,$$

ряда (31.23) ограничена на множестве X, поэтому существует такая постоянная $B > 0$, что для всех $x \in X$ и всех $n = 1, 2, ...$ выполняется неравенство

$$|B_n(x)| \leqslant B.$$

Отсюда для всех $x \in X$, всех $n = 2, 3, ...$ и всех $p = 0, 1, 2, ...$ имеем

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} b_k(x) \right| = |B_{n+p}(x) - B_{n-1}(x)| \leqslant |B_{n+p}(x)| + |B_{n-1}(x)| \leqslant 2B \tag{31.25}$$

Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Из условия (31.22) следует, что существует такой номер n_0, что для всех $x \in X$ и всех $n > n_0$ выполняется неравенство

$$|a_n(x)| < \frac{\varepsilon}{6B} \tag{31.26}$$

Поэтому для любого $x \in X$, любого $n > n_0$ и любого $p = 0, 1, 2, ...$, согласно неравенству Абеля (30.75), будем иметь

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k(x) b_k(x) \right| \underset{\substack{(30.75)\\(31.25)}}{\leqslant} 2B(|a_n(x)| + 2|a_{n+p}(x)|) \underset{(31.26)}{\leqslant} 2B \left(\frac{\varepsilon}{6B} + \frac{2\varepsilon}{6B} \right) = \varepsilon.$$

Таким образом, ряд (31.24) удволетворяет на множестве X критерию Коши равномерной сходимости ряда. $\triangleleft$

Теорема 6 *(признак Абеля-Харди). Если последовательность функций $a_n(x) \in \mathbb{R}, n = 1, 2, ...,$ ограничена на множестве X; а ряд (31.23) равномерно сходится на X, то и ряд (31.24) также равномерно сходится на множестве X.*

$\triangleright$ В силу ограниченности на множестве X последовательности $\{a_n(x)\}$ существует такая постоянная $A > 0$, что для всех $x \in X$ и всех $n = 1, 2, ...$ выполняется неравенство

$$|a_n(x)| \leqslant A. \tag{31.27}$$

В силу же равномерной сходимости ряда (31.23) для произвольно фиксированного $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что для всех X, всех $n > n_0$ и всех $p = 0, 1, 2, ...$имеет место неравенство

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} b_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3A}. \tag{31.28}$$

В результате, согласно неравенству Абеля (30.75), для всех $x \in X$, всех $n > n_0$ и всех $p = 0, 1, 2, ...$ будет выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| \underset{\substack{(30.75)\\(31.28)}}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{3A}(|a_n(x)| + 2|a_{n+p}(x)|) \underset{(31.27)}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{3A}(A + 2A) = \varepsilon,$$

т. е. снова ряд (31.24) удволетворяет на множестве X критерию Коши равномерной сходимости ряда. $\triangleleft$

Пример В п. 30.8* было показано, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \tag{31.29}$$

сходится на всей числовой оси $\mathbb{R}$. Там же было показано, что

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\left|sin\frac{x}{2}\right|}, \quad x \neq 2\pi m, \quad m = 0, \pm1, \pm2, ... \tag{31.30}$$

Поэтому, если положить $a_n = 1/n, b_n(x) = \sin nx, \quad n = 1, 2, ...,$ то последовательность $\{a_n\}$ будет монотонной и как всякая сходящаяся числовая последовательность, может рассматриваться как равномерно сходящаяся, например, на $\mathbb{R}$. Последовательность $\{b_n(x)\}$ ограниченна на любом отрезке $[a, b]$, не содержащем точек вида $x = 2\pi m, \quad m = 0, \pm1, \pm2, ...,$ так как для любой точки x такого отрезка

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \underset{(31.30)}{\leqslant} \frac{1}{\left|sin\frac{x}{2}\right|} \leqslant \underset{[a,b]}{max}\frac{1}{\left|sin\frac{x}{2}\right|} < +\infty,$$

и, следовательно, последовательность $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x)\right|, \quad n = 1, 2, ...,$ ограниченна сверху на отрезке $[a, b]$ числом $\underset{[a,b]}{max}\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$. Таким образом, на всяком отрезке $[a, b]$, не содержащем точек вида $x = 2\pi m, \quad m = 0, \pm1, \pm2, ...,$ ряд (31.29) удволетворяет условиям признака Дирихле-Харди и потому равномерно сходится.

Можно показать, что если отрезок $[a, b]$ содержит точку вида $x = 2\pi m$ при некотором $m = 0, \pm1, \pm2, ...,$ то ряд (31.29) не сходится равномерно на этом отрезке.

31.0. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов. До сих пор при изучении последовательностей и рядов функций эти функции предполагались заданными на произвольном множестве X. Теперь мы перейдём к изучению свойств непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости, в связи с чем множество X будет являться подмножеством числовой прямой.

При изучении вопроса о непрерывности суммы ряда будем рассматривать ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, где $x \in X \subset \mathbb{R}, \quad u_n(x) \in C, \quad n = 1, 2, ...$

Т е о р е м а 7 *Если ряд равномерно сходится на некотором множестве и в какой-то точке этого множества все члены ряда непрерывны, то сумма непрерывна в этой точке.*

$\triangleright$ Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in X, \tag{31.31}$$

равномерно сходится на множестве X, $s(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ — его сумма, а

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \quad n = 1, 2, ..., \tag{31.32}$$

— это частичные суммы.

Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Равномерная сходимость ряда (31.31) означает, что последовательность $\{s_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве X к функции $s(x)$. Поэтому существует такой номер n, что для всех точек $x \in X$ выполняется неравенство

$$|s(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{31.33}$$

так как такое неравенство имеет место для всех номеров, начиная с некоторого. Зфиксируем указанный номер n.

Функция $s_n(x)$, являлась конечной суммой непрерывных (согласно условиям теоремы) в точке $x_0 \in X$ функций $u_1(x), u_2(x), ..., u_n(x)$, сама непрерывна в этой точке. Поэтому существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $x \in X$, удволетворяющих условию $x \in U(x_0; \delta)$, выполняется неравенство

$$|s_n(x) - s_n(x_0) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{31.34}$$

2.2 Задание 3

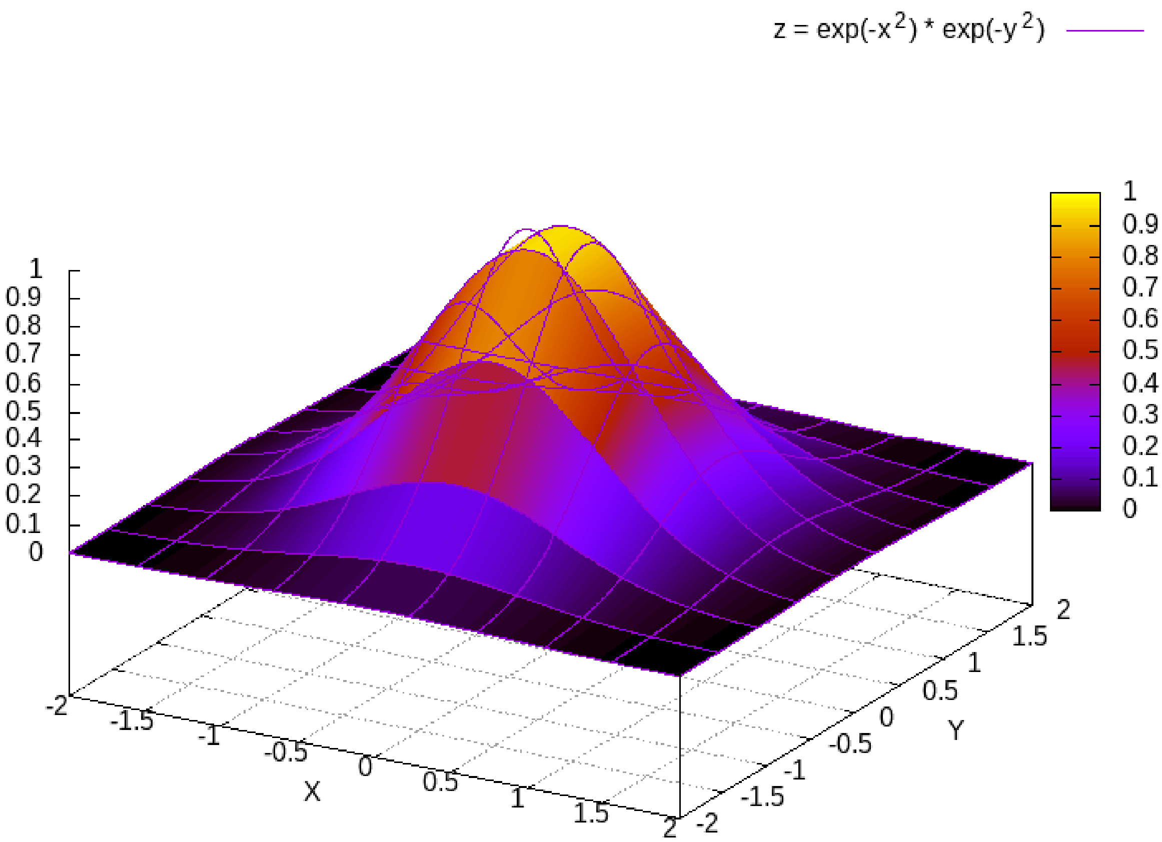

Рис. 1: График из Gnuplot