Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Ильин Владимир группа 22103

____
подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2022

Содержание

1 Описание работы

В первом задании я учился правильно настраивать шрифты, пакеты, кодировку символов. Также я научился добавлять абзацы, в которых применял два специальных символа и одну группу. Таким образом я научился работать со стартовым синтаксисом Latex и текстом.

В задании номер два я выполнил подготовку математического документа, содержащего математический символы и знаки, при помощи издательской системы Latex. Страницы взяты с книги "Краткий курс математического анализа". Таким образом я научился создавать математические формулы, записывать специальные знаки и буквы греческого алфавита, которые используются в математическом документе.

В задании номер три я построил график с помощью Gnuplot. Я научился пользоваться этой программой и тем самым построил график полярных координат в качестве результата.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

ибо в силу неотрицательности функции f имеет место неравенство $\int\limits_{\eta}^{\eta'} f(x)dx \geq 0$, то есть функция $\varphi(\eta)$ возрастает на интервале $[a, b)$.

Существование несобственного интеграла $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ означает существование конечного предела.

$$\lim_{\eta \to b} \varphi(\eta) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx, \tag{51.39}$$

что имеет место тогда и только тогда, когда функция $\varphi(\eta)$ ограничена сверху (см. теорему 5 в п. 6.11), в это в силу (29.15) равносильно условию (29.14).

З а м е ч а н и е.При доказательстве леммы 1 было показано, что в случае неотрицательности функции f функция $\varphi(\eta)$ (см. (29.15)) возрастает на [a,b) и, следовательно, всегда имеет при $\eta \to b$ конечный или бесконечный, равный $+ \propto$, предел в зависимости от того, ограничена она или нет. Если функция $\varphi(\eta)$ неограничена на [a,b), то

$$\lim_{\eta \to b} \int\limits_{a}^{\eta} f(x)dx = \lim_{\eta \to b} \varphi(\eta) = + \propto \tag{51.40}$$

и в этом случае пишут

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = + \propto, \tag{51.41}$$

(как мы уже и поступали в примерах п. 29.1).

Т е о р е м а 4 *(признак сравнения). Пусть*

$$0 \leq g(x) \leq f(x) \tag{51.42}$$

Тогда:

1) если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ *сходится, то сходится и интергрforce* $\int\limits_a^b g(x)dx$

2) если интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ *расходится, то расходится и интергрforce* $\int\limits_a^b f(x)dx$

Следстие 1 *Пусть функции f и g неотрицательны на промежутке [a, b), $g(x) \neq 0$ при всех $x \in$ [a, b) и существует конечнй или бесконечнй предел*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = k \tag{51.43}$$

Тогда:

1) если интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ *сходится и 0* $\leq k < +\propto$, *то и интергрforce* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *сходится*

2) если интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ *расходится и 0* $\leq k < +\propto$, *то и интергрforce* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *расходится*

Следстие 2 *Если функции f(x) и g (x) эквивалентны при* $x \to b$, *т.е. f(x) =* $\varphi g(x)$, *a* $\leq x < b$, $\lim\limits_{x \to b} \varphi = 1$, *то интегреалы* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *и* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *одновременно сходятся или расходятся*

▷ Докажем теорему. Для любого $\eta \in$ [a, b) в силу неравенства (29.16) имеем

$$\int\limits_a^\eta g(x)dx \leq \int\limits_a^\eta f(x)dx \tag{51.44}$$

Поэтому если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится и следовательно согласно лемме 1 ограничен сверху интеграл $\int\limits_a^\eta f(x)dx$, то будет ограничен сверху и интеграл $\int\limits_a^\eta g(x)dx$, откуда, согласно той же лемме, интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится.

Если же расходится интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ то в силу уже доказанного интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ не может сходится, так как тогда бы сходился и мнтеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$, а это противоречит условию. Таким образом, интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится ◁

докажем теперь следствие 1.

▷ Пусть выполняется условие (29.17) и 0 $\leq$ k $<$ + $\propto$. Из того, что k является пределом функции $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to b$, и из неравенства k $<$ k + 1 следует существование такого $\eta \in [a, b)$ что если $\eta < x < b$, то $\frac{f(x)}{g(x)} < k + 1$, т. е.

$$f(x) < (k+1)g(x). \tag{51.45}$$

Если сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$, то сходится и интеграл $\int\limits_\eta^b (K+1)g(x)dx$ (см. (29.3) и (29.9)); следовательно, в силу неравенства (29.18) интеграл $\int\limits_\eta^b f(x)dx$ а поэтому и интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходятся

Пусть теперь условие (29.17) выполняется при 0 < k $\leq + \propto$. Тогда зафиксируем произвольно такое k', чтио 0 < k' < k. Из того, что k является пределом функции $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to b$, и из неравенства k < k + 1 следует существование такого $\eta \in [a, b)$ что для всех $x \in [\eta, b)$ выполняется неравенство $\frac{f(x)}{g(x)} >$ k', т.е. неравенство

$$f(x) > k'g(x). \tag{51.46}$$

Отсюда в силу расходимоти интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^b k'g(x)$, а следовательно, по теореме 1 и расходимость мнтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx \; S_n(x; f) \lhd$

Докажем теперь следствие 2.

$\rhd$ Из условия $\lim\limits_{x \to b} \varphi(\eta)$ следует, что существует такое число с, а < с < b, что при с $\leq$ x < b выполняется неравенство $\frac{1}{2} \leq \varphi(\eta)\frac{3}{2}$. А так как $f(x) = \varphi(\eta)g(x)$, то

$$\frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x). \tag{51.47}$$

Отсюда в силу теоремы и следует, что интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ одновременно сходятся и расходятся.

При применении признака сходимости для исследования интеграла обычно начинают со сравнения подынтегральной функции с функциями

$$\frac{1}{(x-a)^a}, \frac{1}{(x-a)^a}, \frac{1}{x^a}, \tag{51.48}$$

сходимость интегралов от которых уже известна (примеры п. 29.1 и п. 29.2)

2.2 Задание 3

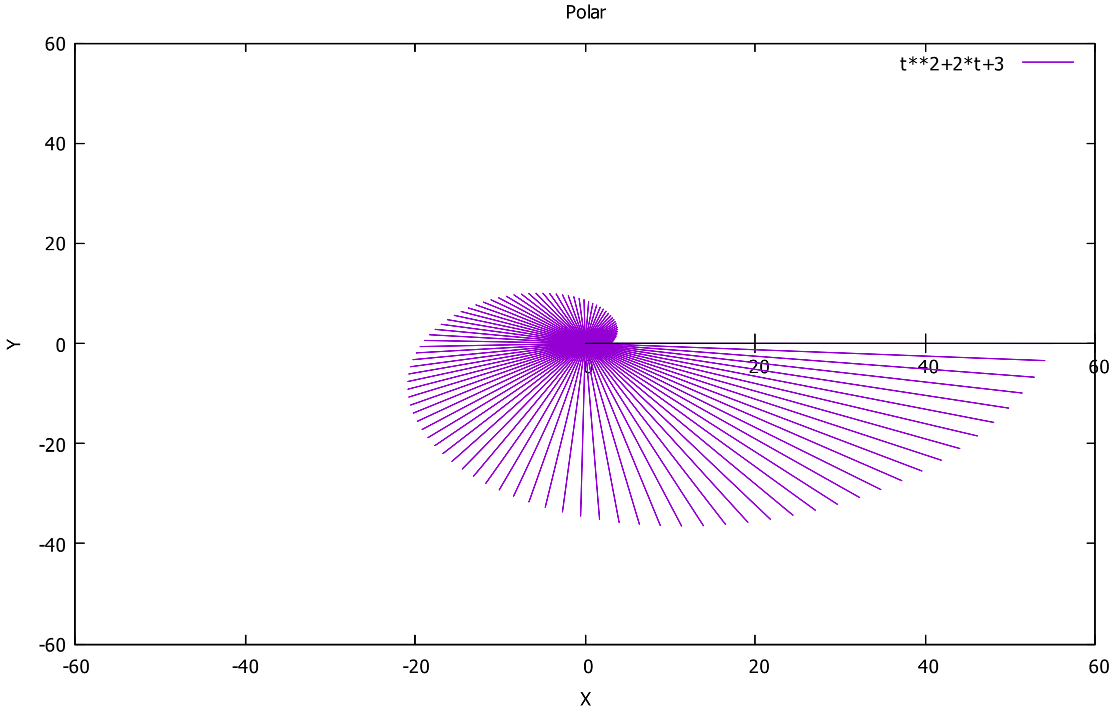

Рис. 1: Полярные координаты. Функция