Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Тучин П. А. группа 22101

____
подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2022

Содержание

1 Описание работы

В этом полугодии мы познакоились с таким предметом как "Учебная практика: Компьютерные технологии в математике". На данной учебной практике я изучил издательскую систему LaTeX, освоил инструменты набора и трансляции математических текстов. Также я овладел системой Gnuplot и инструментами для построения научных графиков в ней.

В первом задании нам нужно было посмотреть обучающее видео, в котором рассказывалось о самых базовых вещах и командах в LaTeX. После просмотра мы должны были скачать файл и добавить в него свой оригинальный текст, который содержал бы спец. символы и группы. В задании 2 необходимо было подготовить документ в формате pdf, содержащий математический текст из учебника по матиматическому анализу, соблюдая при этом все правила написания в LaTeX. В процессе выполнения я научился набирать математические формулы, создавать окружения. В третьем задании я должен был построить изображение кривой в декартовых координатах с помощью системы Gnuplot, а затем разместить его в файле с предыдущим заданием.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Если вместо неравенств (15.16) и (15.17) выполняются строгие не равенства $l(x) < f(x)$ и $l(x) > f(x)$, $a < x1 < x < x2 < b$, то функция называется *строго выпуклой вверх*, соответственно *строго выпуклой вниз на интервале* (a, b). В этом случае любая точка хорды AB, кроме ее концов, лежит ниже (выше) соответствующей точки графика функции.

Всякий интервал, на котором функция (строго) выпукла вверх, соответственно(строго) выпукла вниз,называется *интервалом* (*строгой*) *выпуклости вверх*, соответственно *вниз* этой функции.

Теорема 5 *(достаточные условия строгой выпуклости). Если вторая производная функции отрицательна положительна во всех точках интервала, то функция строго выпукла вверх соответствен но строго выпукла внизна этом интервале.*

▷ Если $a < x_1 < x < x_2 < b$, то

$$l(x) - f(x) \underset{(15.15)}{=} \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} - f(x)\frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{[f(x_2) - f(x)](x - x_1) - [f(x) - f(x_1)](x_2 - x)}{x_2 - x_1}.$$

Применив к разностям значений функций, стоящим в квадратных скобках, теорему о среднем Лагранжа (п. 12.2), получим

$$l(x) - f(x) = \frac{f'(\eta)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(\xi)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{[f'(\eta) - f'(\xi)](x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x_1},$$

где $x_1 < \xi < x < \eta < x_2$. Применим теперь теорему о среднем Лагран жа к разности значений производной $f'(\eta) - f'(\zeta)$; тогда будем иметь

$$l(x) - f(x) = \frac{f''(\zeta)(\eta - \xi)(x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x_1}, \xi < \zeta < \eta.$$

Здесь знак правой части равенства совпадает со знаком $f''(\zeta)$ (все остальные сомножители положительны). Поэтому если $f'' < 0$ на (a, b), то $l(x) < f(x)$, т. е. Функция f строго выпукла вверх; если же $f'' > 0$ на (a, b), то $l(x) > f(x)$, т. е. функция f строго выпукла вниз. $\triangleleft$

Отметим, что условие постоянства знака второй производной, являясь достаточным условием строгой выпуклости вверх или вниз, не является необходимым: на интервалах строгой выпуклости вверх или вниз вторая производная может обращаться в нуль. Например, функ ция $y = x^4$ строго выпукла вниз на всей числовой прямой, однако ее вторая производная $y'' = 12x^2$ обращается в нуль при $x = 0$.

Замечание 4. Из доказательства теоремы 5 видно, что если условие положительности второй производной на интервале заменить условием ее неотрицательности, то функция будет выпукла вниз на этом интервале. Соответственно, если вторая производная неположи тельна на интервале, то функция выпукла вверх на этом интервале.

Покажем, что расположение графика дважды дифференцируемой функции относительно касательной к этому графику также зависит от знака второй производной.

Теорема 6 *Пусть функция f имеем во всех точках x интервала (a, b) положительную (отрицательную) вторую производную $f''(x) > 0$ (соответственно $f''(x) < 0$). Тогда, какова бы ни была точка $x_0 \in (a, b)$, все точки $(x, f(x)), x \in (a, b)$, графика функции f лежат выще (соответственно ниже) касательной, проведенной к нему в точке $(x_0, f(x_0))$, кроме самой этой точки, которая лежит на касательной.*

$\triangleright$ Если у функции f существует вторая производная в точке x_0, то в этой точке существует конечная первая производная, а следователь но, график функции имеет в точке $(x_0, f(x_0))$ наклонную касательную

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{18}$$

Обозначим правую часть этого уравнения через $L(x)$, тогда

$$f(x) - L(x) \underset{(18)}{=} [f(x) - f(x_0)] - f'(x_0)(x - x_0).$$

Применив к разности $f(x) - f(x_0)$ теорему о среднем Лагранжа, получим

$$f(x) - L(x) = f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = [f'(\xi) - f'(x_0)](x - x_0),$$

где $a < x_0 < b, a < x < b$, а ξ лежит между $x_0 < x$.

Применив еще раз теорему Лагранжа, но уже к разности произ водных $f'(\xi) - f'(x_0)$, будем иметь

$$f(x) - L(x) = f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0), \tag{19}$$

где точка η лежит между ξ и x_0. Поскольку точка ξ лежит между точками x и x_0, то точки ξ и x расположены по одну сторону от точки x_0, и поэтому $(\xi - x_0)(x - x_0) > 0$. В силу этого знак разности $f(x) - L(x)$ при $x \neq x_0$ совпадает со знаком второй производной $f''(\eta)$. Следовательно, если на интервале (a, b) вторая производная положи тельна, то $f(x) > L(x)$, т. е. график функции f лежит над касательной, а если вторая производная отрицательна, то $f(x) < L(x)$, т. е. график функции лежит под касательной $y = L(x), x \in (a, b), x_0 \neq x_0$. $\triangleleft$

Опеределение 5 *Пусть функция f дифференцируема при $x = x_0$ и пусть $Y = L(x)$ - уравнение наклонной касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ (см. (18)). Если разность $f(x) - L(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 называется точкой перегиба функции f.*

Если x_0 точка перегиба функции, то точка $(x_0, f(x_0))$ называется *точкой перегиба графика функции f*. В точке $(x_0, f(x_0))$ график функции f переходит с одной стороны наклонной касательной 18 на другую сторону (рис. 87).

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = x_3$. Поскольку $f''(x) = 6x$, то $f''(x) < 0$ для всех $x < 0$ и $f''(a) > 0$ для всех $x > 0$. Следовательно (теорема 5), функция $f(x) = x_3$ выпукла вверх на бесконечном интервале $(-\infty, 0)$ и выпукла вниз на $(0, +\infty)$ (см. рис. 82). Уравнение касательной к ее графику в точке $4(0,0)$ имеет вид $\ = 0$. Поэтому поскольку при $x < 0$ выполняется неравенство $f(x) < 0$, а при $x > 0$ неравенство $f(x) > 0$, то точка $x = 0$ является точкой перегиба функции $f(x) = x_3$.

Теорема 7 *(необходимое условие точки перегиба). Если в точке перегиба функции существует вторая производная, то она равна нулю.*

▷ Действительно, пусть функция f имеет в точке x_0 вторую производную и, как и выше, $y = L(x)$ - уравнение касательной к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$, т. е.

$$L(x) \equiv f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Тогда в силу формулы Тейлора

$$f(x) - L(x) =$$
$$= (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) - L(x) =$$
$$= \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2), a \to x_0.$$

Если бы $f''(x_0) \neq 0$, то знак разности $f(x) - L(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 совпадал бы со знаком числа $f''(x_0)$. В этом случае разность $f(x) - L(x)$ не меняла бы знака в точке x_0 и, следовательно, эта точка не была бы точкой перегиба. Итак, если x_0 - точка перегиба функции , то $f''(x_0) = 0$. ◁

Теорема 8 *(первое достаточное условие точек перегиба). Если функция f дифференцируема в точке x_0, дважды дифференцируема в некоторой проколотой окрестности этой точки и ее вторая производная меняет знак при переходе аргумента через точку x_0, то x_0 является мочкой перегиба функции f.*

▷ Действительно, запишем, как и выше, уравнение касательной 18 к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ в виде $y = L(x)$. При

2.2 Задание 3

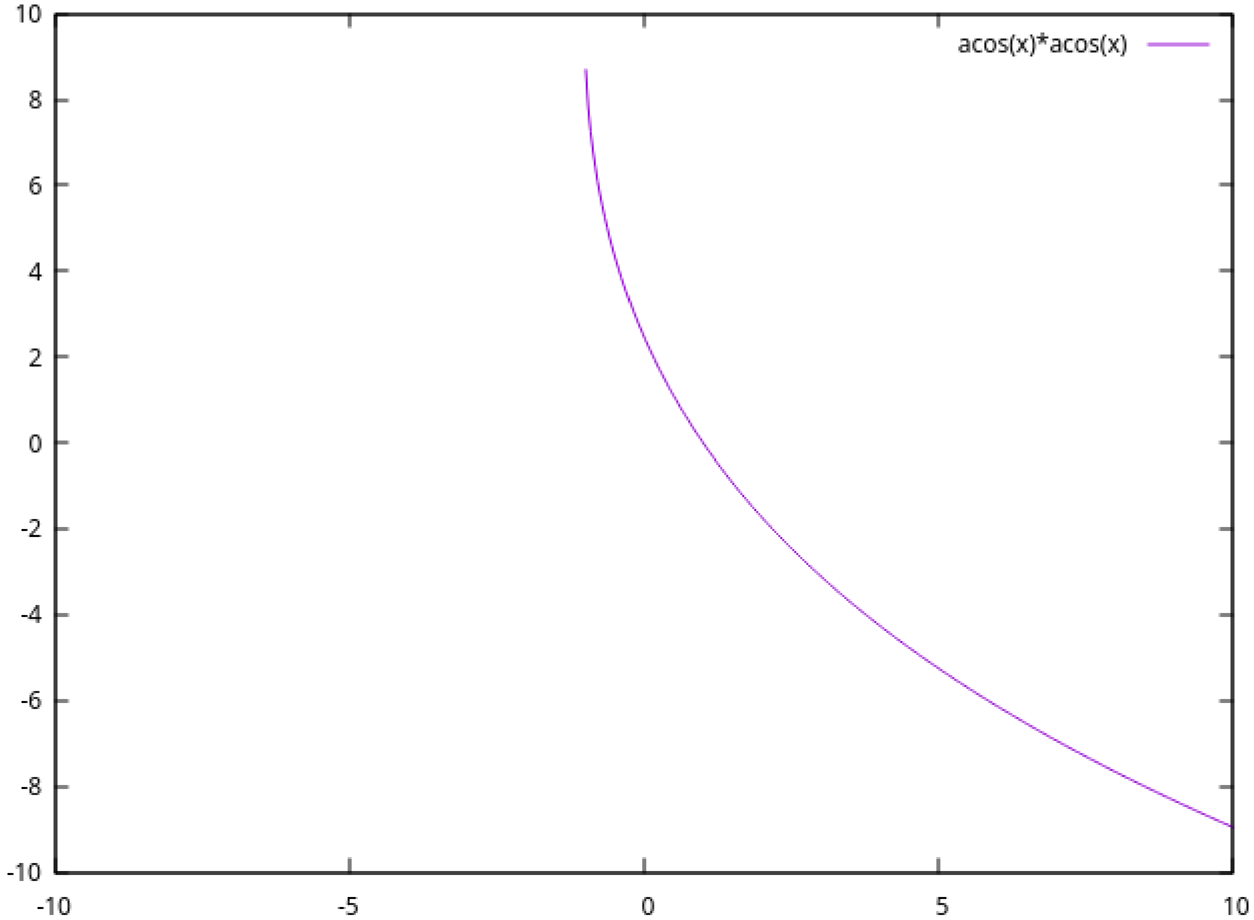

Рис. 1: $arccos(x)^2$