Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Панфилов Г. Н. группа 22104

____
подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2022

Содержание

1 Описание работы

В ходе прохождения компьютерной практики по дисциплине "Компьютерные технологии в математике"на протяжении 2 семестра были получены следующие навыки:

1. Умение работать с текстовым редактором LATEX
   (a) набор математическим формул.
   (b) рубрикациия текста и специальных абзацев.
   (c) оформление новых окружений (теоремы, леммы и пр.) и команд.
2. Работа с графическим редактором gnuplot
   (a) оформление графика математической функции

В результате прохождения практики были выполнены две задачи:

1. написание математического текста (в качестве задания 2)
2. построение графика функции $y = cos(x)$ (в качестве задания 3)

содержание задач описано в соответствующих разделах данного отчета.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Поскольку функция y = f(x) непрерывна при $x = x_0$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ и, следовательно, в силу теоремы о пределе сложной функции (см. (6.41) в п.6.13) имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \epsilon(\Delta y) = 0 \tag{1}$$

Поделив обе части первого неравенства (10.30) на $\Delta x \neq 0$, получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = g'(y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \epsilon(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{2}$$

В силу равенств (1) и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ предел правой части равенства (2) при $\Delta x \to 0$ существует и равен $g'(y_0)f'(x_0)$, следовательно, существует и предел левой части, т.е существует

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x},$$

причем

$$F'(z_0) = g'(y_0)f'(x_0).\triangleleft$$

С л е д с т в и е (инвариантность формы дифференциала).

$$dz = F'(x_0)dx = g'(y_0)dy, \tag{3}$$

или, короче,

$$dz = z'_x dx = z'_y dy.$$

Эта формула показывает, что формально записи дифференциала сложной функции посредством независимой переменной x и посредством зависимой переменной y имеют один и тот же вид, но следует иметь в виду, что здесь $dx = \Delta x$ - приращение независимой переменной x, а dy - дифференциал функции $y = f(x)$, т.е. главная линейная часть приращения Δy зависимой переменной ("главная"в том смысле, что разность $\Delta y - dy$ является при $\Delta x \to 0$ бесконечно малой более высокого порядка, чем само Δx).

Докажем формулу(3):

$$dz = dF(x_0) \underset{10.13}{=} F'(x_0)dx \underset{10.28}{=} g'(y_0)f'(x_0)dx \underset{10.13}{=} g'(y_0)dy.$$

П р и м е р. Вычислим производную функции $y = x^\alpha, x > 0, \alpha \in \mathbf{R}$, с помощью формулы (10.28). Для этого представим функцию $y = x^\alpha$ как композицию функций $y = e^u$ и $u = \alpha \ln x$. Заметив, что $\frac{dy}{du} = e^u$, $\frac{du}{dx} = \frac{\alpha}{x}$, получим

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = (e^u)'_u u'_x = e^u \frac{\alpha}{x} = e^{\alpha \ln x}\frac{\alpha}{x} = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1},$$

т.е

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{4}$$

10.8. Гиперболические функции и их производные. Нередко в математическом анализе встречаются функции $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ и $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Они имеют специальные названия: первая из них называется *гиперболический синус* и обозначается sh x, а вторая - *гиперболический косинус* ch x. Таким образом,

$$shx\frac{e^x - e^{-x}}{2}, \tag{5}$$

$$chx\frac{e^x + e^{-x}}{2}, \tag{6}$$

Эти функции обладают некоторыми свойствами, похожими на свойства обычных (круговых) синусов и косинусов, например,

$$ch^2x - sh^2x = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 - e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = 1, \tag{7}$$

$$2shxchx = 2\frac{e^x - e^{-x}}{2}\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = sh2x. \tag{8}$$

Слово "гиперболический"в названии функций (5) и (6) объясняется тем, что уравнения

$$x = \alpha cht, y = \alpha sht, \alpha > 0, -\infty < t < +\infty,$$

являются, в силу формулы (7), параметрическими уравнениями правой ветви гиперболы $x^2 - y^2 = \alpha^2$, подобно тому, как уравнения

$$x = \alpha cost, y = \alpha sint, 0 \leq t \leq 2\pi,$$

являются параметрическими уравнениями окружности $x^2 - y^2 = \alpha^2$. Вычислим производные гиперболических синуса, косинуса:

$$(shx)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx, \tag{9}$$

$$(chx)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx, \tag{10}$$

10.9. Производные комлплекснозначных функций действительного аргумента. Если функция $f(x)$ задана в некоторой окрестности U точки x_0 числовой оси и принимает, вообще говоря, комплексные значения, т.е. имеет вид

$$f(x) = u(x) + iv(x), u(x) \in \mathbf{R}, v(x) \in \mathbf{R}, x \in U,$$

то ее производная в точке x_0 определяется равенством

$$f'(x_0) = u'(x_0) + iv'(x_0) \tag{11}$$

(само собой разумеется, что это определение имеет смысл только тогда, когда у функции $u(x)$ и $v(x)$ существуют производные в точке x_0) При таком определении операция дифференцирования остается линейной:

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)' = \lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_2', \lambda_1 \in C, \lambda_2 \in C.$$

П р и м е р. Если f(x) $= cos\alpha x + isin\alpha x$, то

$$f'(x) \underset{(10.41)}{=} -\alpha sin\alpha x + i\alpha cos\alpha x = i\alpha(cos\alpha x + isin\alpha x) = i(x).$$

Можно обобщить понятие производной на случай комплекснозначных функций комплексного переменного. Это понятие приводит к большому качественному многообразию новых явлений и потому изучается в отдельном курсе теории функций комплексного переменного. §11. **Производные и дифференциалы высших порядков 11.1. Производные высших порядков.** Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $y' = f'(x)$ во всех точках некоторой окрестности точки x_0. Если функция $f'(x)$ в свою очередь имеет в точке x_0 производную $[f'(x)']'|_{x=x_0}$, то она называется *второй производной функции* f *в точке* x_0 и обозначается $f''(x_0)$ или $f^{(2)}x_0$. Таким образом, опуская обозначения аргумента, имеем

$$y^{(2)} \equiv y''(y')'.$$

Аналогично определяются и производные $y^{(n)}$ более высоких порядков n:

$$y^{(n+1)} = [y^{(n)}]', n = 0, 1, \ldots, \tag{12}$$

где для удобства считается, что $y^{(0)}$.

Примеры. 1. Если $y = a^x, a > 0$, то $y' = a^x \ln a, y'' = a^x \ln^2 a$, вообще, $y^{(n)} = a^x \ln^n a, n = 0, 1, 2, \ldots$ В частности, если $y = e^x$, то

$$(e^x)^{(n)} = e^x \tag{13}$$

2. Если $y = sinx, y' = cosx, y^{(2)} = -sinx, y^{(2)} = -cosx, y^{(4)} = sinx$. Заметив, что $cos\alpha = sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$,получим

$$y' = sin(\alpha + \frac{\pi}{2}), y^{(2)} = cos(x + \frac{\pi}{2}) = sin(x + 2\frac{\pi}{2}).$$

Вообще,

$$(sinx)^{(n)} = sin(x + n\frac{\pi}{2}). \tag{14}$$

Аналогично,

$$(cosx)^{(n)} = cos(x + n\frac{\pi}{2}, n = 0, 1, \ldots). \tag{15}$$

2.2 Задание 3

Пример функции косинуса