Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Кузьмин Р. С. группа 22103

____
подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2022

Содержание

1 Описание работы

Заданием номер два является подготовка документа, содержащего математический текст, при помощи издательской системы Latex. В качестве источника математического текста выступает книга "Краткий курс математического анализа". Материалами для выполнения задания являются скринкасты и литературные источники. Заданием номер три является построение графика с помощью системы для интерпретатора команд Gnuplot и последующее размещение изображения построенной кривой в декартовой системе координат, в документе подготовленном во время выполнения задания номер два.В помощь предоставляются скринкасты и электронный ресурс "Gnuplot Homepage"

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

полуинтервал вида $[a, b)$ и $(a, b]$. Их формулировка и доказательство по мере потребности предоставляются читателю

7.4. Равномерная непрерывность.

Если функция f непрерывна на отрезке, то это означает, что любой точки x этого отрезка и для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$ (зависящее от точки x и числа ε) что для всех точек x' отрезка, для которых

$$|x' - x| < \delta, \tag{7.20}$$

выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon \tag{7.21}$$

Если число δ можно выбрать не зависящим от точки x так, чтобы при выполнении (7.20) выполнялось условие (7.22), то функция f называется *равномерно непрерывной*. Сформулируем определение этого важного понятия более подробно.

Определение 1 *Функция f, заданная отрезком [a,b] называется равномерно непрерывной на нем, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любых двух точек $x \in [a, b]$ и $x' \in [a, b]$ таких, что $|x' - x| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$.*

В символической записи определение непрерывности функции на отрезке выглядит следующим образом:

$$\forall x \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x', |x' - x| < \delta : |f(x') - f(x)| \varepsilon,$$

а определение равномерной непрерывности выглядит так:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x', |x' - x| < \delta : |f(x') - f(x)| < \varepsilon. \tag{7.22}$$

Здесь точки x и x' принадлежат отрезку, на котором задана функция f.

Пример 1 *Примеры.1.Функция $f(x) = x$ равномерно непрерывна на всей числовой оси R. Действительно, если задано $\varepsilon > 0$, то, выбрав $\delta = \varepsilon$, получим, что для любых точек x и x' таких, что $|x' - x| < \delta$, выполняется неравенство*

$$|f(x') - f(x)| = |x' - x| < \delta = \varepsilon,$$

т.е. условие определения 1 выполнены.
2. Функция $f(x) = x^2$ не равномерно непрерывна на всей числовой оси R. Это следует из того, что для любого h≠0 имеет место

$$\lim_{x\to\infty} [f(x + h) - f(x)] = \lim_{x\to\infty} [(x + h)^2 - x^2] = \lim_{x\to\infty} (2hx + h^2) = \infty. \tag{7.23}$$

Поэтому, если задано $\varepsilon > 0$, то, каково бы ни было $\delta > 0$, зафиксировав $h \neq 0$,$|h| < \delta$ можно в силу (7.23) так выбрать x, что для точек x'=x+h и x будем иметь

$$|f(x') - f(x)| > \varepsilon,$$

и в то же время

$$|x' - x| = |h| < \delta$$

Ясно, что всякая равнмерно непрерывная на отрезке функция непрерывна на нем: если в определении равномерной непрерывности зафиксировать точку x, то получится определение непрерывности в этой точке. Верно и обратное утверждение.

Теорема 1 (Кантора) *Функция, непрерывна на отрезке, равномерно непрерывна на нем*

$\triangleright$ Докажем теорему от противного. Допустим, что существует непрерывная на некотором отрезке [a,b] функция f, которая, однако, на нем не равномерно непрерывна. Это означает (см. (7.22), что существует, такое ε_0, что для любого $\delta > 0$ найдутся такие точки $x \in [a, b]$ и $x' \in [a, b]$, что $|x' - x| < \delta$,но $|f(x') - f(x)| \geq \varepsilon$.В частности, для $\delta = 1/n$ найдутся такие точки, обозначим их x_n и x'_n, что

$$|x'_n - x_n| < \frac{1}{n}, \tag{7.24}$$

но

$$|f(x'_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0. \tag{7.25}$$

Из последовательности точек (x_n) в силу свойства компактности отрезка (см. теорему 4 в п. 5.8) можно выделить сходящуюся подпоследовательность (x_{n_k}). Обозначим ее предел в x_0:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0. \tag{7.26}$$

Поскольку a $\leq x_{n_k} \leq$ b, $k = 1, 2, \ldots$, то a $\leq x_0 \leq$ b.Функция f непрерывна в точке x_0, поэтому

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \underset{7.26}{=} f(x_0). \tag{7.27}$$

Подпоследовательность (x'_{n_k}) последовательности (x'_{n_k}) также сходится в точке x_0, ибо

$$|x'_{n_k} - x_0| \leq |x'_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| \underset{7.24}{<} \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x| \underset{7.26}{\to} 0$$

при $k \to \infty$. Поэтому

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})' = f(x_0) \tag{7.28}$$

Из (7.27) и (7.28) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} [f(x'_{n_k}) - f(x_{n_k})] = f(x_0) - f(x_0) = 0,$$

а это противоречит условию, что при всех $k = 1, 2, \ldots,$ выполняется неравенство

$$|f(x_{n_k})' - f(x_{n_k})| \geq_{7.25} \varepsilon_0 > 0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему. $\triangleleft$ Условие равномерной непрерывности можно сформулировать в терминах так называемых колебаний функции на отрезках.

Определение 2 *Пусть функция f задана на отрезке [a,b]. Тогда величина*

$$\omega(f; [a, b]) = \sup_{x,x'\in[a,b]} (f(x') - f(x)). \tag{7.29}$$

называется *колебанием функции* f на отрезке[a,b].
Из двух значений $f(x') - f(x)$ и $f(x) - f(x')$ одно неотрицательно и, следовательно, не меньше второго, поэтому, величина верхней грани и в правой части равенства не изменится, если вместо абсолютной величины $|f(x') - f(x)|$ разности $f(x') - f(x)$ взять саму эту разность:

$$\omega(f; [a, b]) = \sup_{x,x'\in[a,b]} (f(x') - f(x)).$$

Справедливо следующее утверждение.
Для того чтобы функция f была равномерно непрерывна на отрезке [a,b], необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta >$), что для любого отрезка $[x, x'] \subset [a, b]$ такого, что $0 < x' - x < \delta$, выполнялось неравенство

$$\omega(f; [x, x']) < \varepsilon. \tag{7.30}$$

$\lhd$Действительно, поскольку $x, x' \in [x, x']$, то из неравентсва (7.30) следует, что $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$, а поэтому выполняется утверждение (7.22).
Обратно, если справедливо утверждение (7.22), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых точек x и x' отрезка [a,b], удовлетворяющих условию $|x'0 - x| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x') - f(x)| < \varepsilon/2$. В частности, это неравентсво выполняется и для всех таких точек $x, x' \in [a, b]$, для которых $0 < x' - x < \delta$. Но для любых двух точек xi и η отрезка $[x, x']$ выполняется, очевидно, неравенство $0 < |\eta - \xi| < x' - x < \delta$, а следовательно, и неравенство $|f(\eta) - f(\xi)| < \varepsilon/2$. Поэтому для любого отрезка $[x, x']$ такого, что $0 < x' - x < \delta$, имеем

$$\omega(f; [x, x']) = \sup_{\xi, \eta \in [x, x']} |f(\eta) - f(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Утверждение доказано.$\rhd$

§8 Непрерывность элементарных функция

8.1 Многочлены и рациональные функции.

Теорема 1 *Многочлен непрерывен на всей числовой оси.*

$\lhd$ Действительно, во-первых, постоянная на всей числовой оси функция во всех точках (см. свойство 3° пределов функций)

2.2 Задание 3

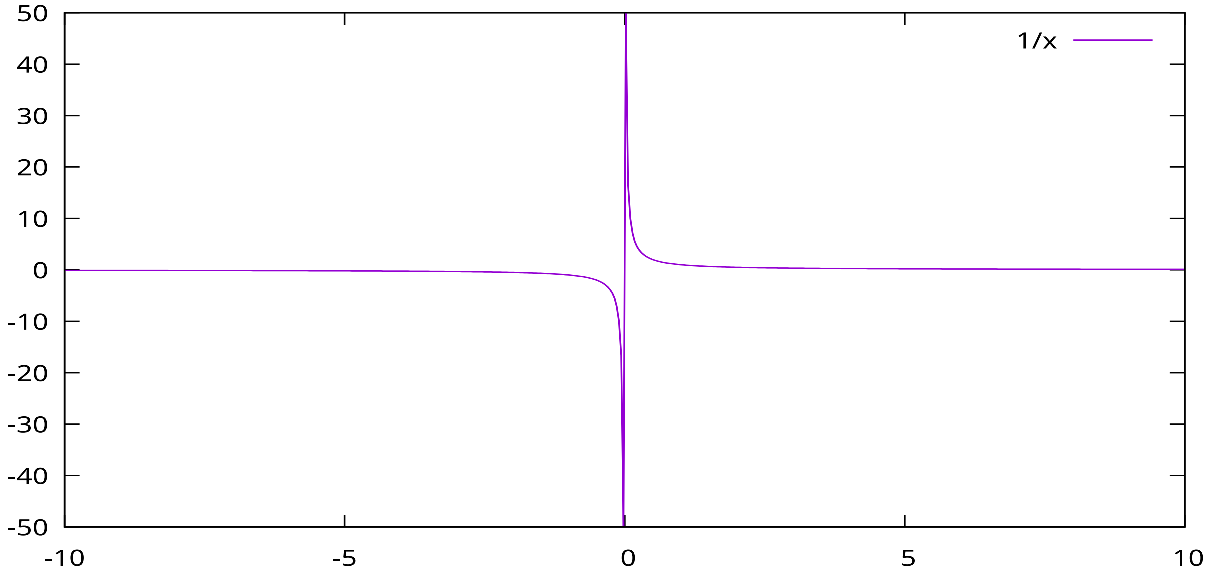

Рис. 1: Пример, график гипербола