Министерство образования и науки Российской Федерации

ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»

Институт математики и информационных технологий

Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике

(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:

Игараков Я. С. группа 22103

____

подпись

Руководитель практики:

к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____

подпись

Итоговая оценка:

____

оценка

Петрозаводск, 2022 г.

Содержание

1 Описание работы

1 задание научило меня основным принципам написания работ на LaTeX и его последующей трансляции в pdf. В частности, я приобрёл такие навыки как: подключение пакетов, выбор начертания, вставка спецсимволов и деление текста на абзацы.

Во втором задании требовалось создать трёхстраничный документ - копию 301, 302, 303 страниц из учебника Кудрявцева Л. Д. "Краткий курс математического анализа". Для успешного выполнения данной работы я пользовался учебным пособием *"Работа в системе LaTeX"*, скринкастами преподавателя, а также интернет-ресурсом "Stack Exchange".

Благодаря третьему заданию я научился строить графики математических функций в Gnuplot, один из которых успешно добавил в документ из предыдущей работы.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Если $a < c < b$, то из равенства

$$\int\limits_a^\eta f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^\eta f(x)dx \tag{29.2}$$

сразу видно, что несобственный интеграл (29.1) существует в том и только том случае, когда существует несобственный интеграл $\int\limits_c^b f(x)dx = \lim\limits_{\eta\to b}\int\limits_c^\eta f(x)dx$, причем в случае существования этих интегралов, перейдя в равенстве (29.1) к пределу при $\eta \to b$, получим

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx. \tag{29.3}$$

В этом равенстве $\int\limits_a^b$ и $\int\limits_c^b$ - несобственные интегралы, а $\int\limits_a^c$ - собственный интеграл. Если функция f определена на полуинтервале $(a, b]$, $-\infty \leqslant a < b < +\infty$, и при любом $\xi \in (a, b]$ интегрирует по Риману на отрезке $[\xi, b]$, то аналогично формуле (29.1) несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ определяется как функция $F(\xi) = \int\limits_\xi^b f(x)dx$ нижнего предела интегрирования, $a < \xi \leqslant b$.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{\xi\to a}\int\limits_\xi^b f(x)dx$, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, а если этот предел не существует, то - *расходящимся*.

Здесь, как и выше, в случае, когда несобственный интеграл сходится, говорят, что он *существует*, а когда расходится, что он *не существует*.

Если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, то предел $\lim\limits_{\xi\to a}\int\limits_\xi^b f(x)dx$ обозначается тем же символом, что и сам интеграл, т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\xi\to a}\int\limits_\xi^b f(x)dx, \tag{29.4}$$

и для краткости также называется несобственным интегралом (иногда - его *значением*).

Для интеграла (29.4) имеет место свойство, аналогичное свойству (29.3) для интеграла (29.1).

Если функция f определена на интервале (a, b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, и $c \in (a, b)$, то *несобственным интегралом* $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется пара несобственных интегралов $\int\limits_a^c f(x)dx$, $\int\limits_c^b f(x$
Если оба эти интеграла сходятся, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется сходящимся, а если хотя бы один расходится, то - расходящимся. Если интегралы $\int\limits_a^c f(x)dx$ и $\int\limits_c^b f(x)dx$ сходятся,

то их сумма обозначается тем же символом $\int\limits_a^b f(x)dx$, т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)dx \stackrel{def}{=} \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx. \tag{29.5}$$

Из свойства (29.3) и аналогичного свойства для интеграла (29.4) следует, что существование и значение несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ не зависят в рассматриваемом случае от выбора точки $c \in (a, b)$.

Определим теперь общее понятие несобственного интеграла от функции f по промежутку δ с концами a и b, $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$.

Всякое множество точек $X = x_{k}{}_{k=0}^{k=n}$ расширенной числовой прямой называется *правильным разбиением промежутка δ относительно функции f*, если:

1. $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$;

2. функция f интегрирует по Риману на любом конечном отрезке, лежащем на промежутке δ и не содержащем точек множества X.

Ясно, что на каждом из промежутков $(x_0, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{n-1}, x_n)$ имеет смысл несобственный интеграл от функции f одного из трех рассмотренных выше типов,

Совокупность интегралов

$$\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx, \quad k = 1, 2, ..., n, \tag{29.6}$$

называется в этом случае *несобственным интегралом* $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Если все интегралы (29.6) сходятся, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется *сгодящимся*, а если хотя бы один из них расходится, то - *расходящимся*.

В случае когда интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится, через $\int\limits_a^b f(x)dx$ обозначается и сумма интегралов (29.6), т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)dx \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$$

и эта сумма также называется *несобственным интегралом*. (иногда - его *значением*).

Сходимость и расходимость несобственного интеграла, как и его значение, если он сходится, не зависят от выбора правильного разбиения промежутка δ относительно заданной функции f.

Заметим, что если к правильному разбиению X промежутка δ добавить любое конечное множество точек расширенной числовой прямой, принадлежащих этому промежутку, то полученное множество также будет, очевидно, правильным разбиением δ относительно функции f.

Перейдем к рассмотрению примеров. Вычислим несобственные интегралы от функции $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \alpha > 0$, на полуинтервале $(0, 1]$ (где она неограниченна) и на бесконечном промежутке $[1, +\infty)$.

Примеры 1 *1.* $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} \underset{(29.4)}{=} \lim\limits_{\xi\to 0} \int\limits_\xi^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\xi\to 0} \ln x \mid_\xi^1 = +\infty.$

2. $\alpha \neq 1$, $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \underset{(29.4)}{=} \lim\limits_{\xi\to 0} \int\limits_\xi^1 x^{-\alpha} dx = \lim\limits_{\xi\to 0} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \mid_\xi^1 =$

$\begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, \text{если} \alpha < 1, \\ +\infty \text{если} \alpha > 1. \end{cases}$ *Обратим внимание на то, что при $0 < a < 1$ несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ существует, в то время как собственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ заведомо не существует, поскольку функция при любом ее доопределении в точке $x = 0$ будет неограниченной на отрезке $[0, 1]$.*

Этот пример говорит о том, что в случае конечного промежутка понятие несобственного интеграла шире понятия собственного интеграла. В случае же бесконечного промежутка понятия собственного интеграла просто нет.

Итак, интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$ (при $\alpha < 0$ этот интеграл является интегралом Римана).

3. $\int\limits_1^{+\infty} \underset{(29.1)}{=} \lim\limits_{\eta\to +\infty} \int\limits_1^\eta \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\eta\to +\infty} \ln x \mid_1^\eta = +\infty.$

2.2 Задание 3

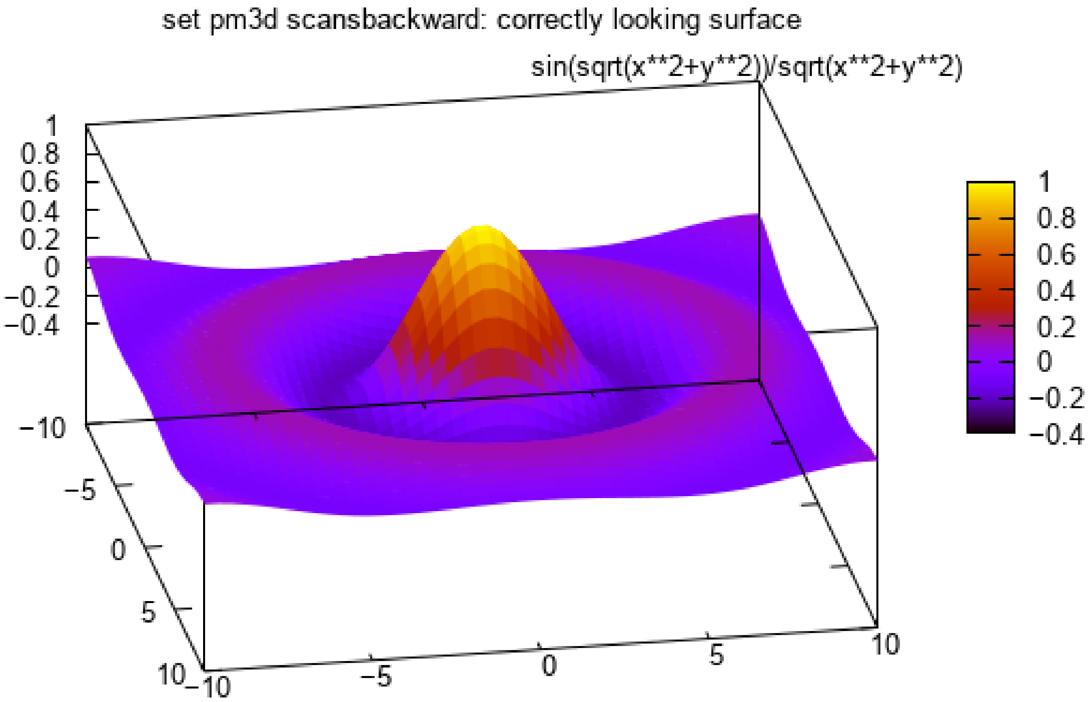

Рис. 1: 3D график