Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике

(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:

Гусейнов Д. А. группа 22103

____

подпись

Руководитель практики:

к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____

подпись

Итоговая оценка:

____

оценка

Петрозаводск, 2022 г.

Содержание

1 Описание работы

Во втором задании требовалось создать документ - копию 243, 244, 245 страниц из учебника Кудрявцева Л. Д. ”Краткий курс математического анализа”. Для успешного выполнения данной работы я пользовался учебным пособием *”Работа в системе LaTeX”* и материалами сайта ”Stack Exchange”.

Третье задание требовало создать график через Gnuplot одной из понравившихся мне математических функций, и интегрировать его в предыдущую работу. Посмотрев примеры с официального сайта, я сформировал свой, уникальный график.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

где $a^2 \overset{def}{=} q - \frac{p^2}{4} > 0$, и положим $t = x + \frac{p}{2}$, будем иметь

$$\int \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{Bx+D}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^2}dx = \int \frac{B\left(t-\frac{p}{2}\right)+D}{(t^2+a^2)^n}dt =$$

$$= B\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} + \left(D - \frac{pB}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}.$$

Таким образом, вычисление интеграла $\int \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^n}dx$ сводится к вычислению интегралов, стоящих в правой части получившегося равенства.

Если $n = 1$, то

$$\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(t^2+a^2) + C, \tag{20.3}$$

$$\int dt(t^2+a^2) = \frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a} + C. \tag{20.4}$$

Если же $n > 1$, то

$$\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int (t^2+a^2)^{-n}d(t^2+a^2) = -\frac{1}{2(n-1)(t^2+a^2)^n - 1} + C. \tag{20.5}$$

Для интеграла $I_n \overset{def}{=} \int \frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^n}, n > 1$, выведем с помощью интегрирования по частям рекуррентную формулу, т.е. выразим I_n через I_{n-1}:

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^n}dt =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int dt(t^2+a^2)^n - 1 - \frac{1}{a^2}\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} \underset{(20.5)}{=}$$

$$\underset{(20.5)}{=} \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\left(-\frac{t}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(n-1)}I_{n-1}\right),$$

т.е.

$$I_n = \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}(1 - \frac{1}{2(n-1)})I_{n-1}, \quad n = 2, 3, ... \tag{20.6}$$

Так как интеграл I_1 уже вычислен (см. (20.4)), по формуле (20.6) можно последовательно вычислить I_2, I_3 и т. д.

Таким образом, интеграл от любой элементарной дроби находится в явном виде и является элементарной функцией.

20.2. Общий случай. Любую рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, а всякая правильная рациональная дробь раскладывается в сумму элементарных рациональных дробей (см. п. 3.5), поэтому задача интегрирования рациональных дробей сводится к интегрированию многочленов и элементарных рациональных дробей, т. е. функций, от которых мы уже умеем вычислять интегралы. Имеет место следующая

Теорема 1. *Неопределенный интеграл от любой рациональной дроби на всяком промежутке, на котором ее знаменатель не обращается в нуль, существует и выражается через элементарные функции, являющиеся линейной комбинацией композиций рациональных дробей, логарифмов и арктангенсов.*

$\triangleright$ Для доказательства достаточно, поделив числитель на знаменатель, данную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ представить в виде $\frac{P(x)}{Q(x)} =$
$= S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, где $S(x)R(x)-$ многочлены, причем степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$, т. е. $\frac{P(x)}{Q(x)}-$ правильная рациональная дробь. Разложив ее согласно теореме 2 из п. 3.5 на элементарные, получим, что всякая рациональная дробь является либо многочленом, либо суммой многочлена и конечного числа элементарных рациональных дробей. Интеграл от каждого слагаемого этой суммы (см. п. 19.3 и п. 20.1) имеет вид, указанный в теореме. $\triangleleft$

Следует отметить, что при применении описанного метода интегрирования рациональных дробей на практике он приводит к окончательному результату, т. е. к элементарной функции, только в том случае, когда удается найти все корни знаменателя интегрируемой рациональной дроби.

§21. Интегрирование некоторых иррациональностей

21.1. Рациональные функции от функций. Функции вида

$$P(u_1, u_1, ..., u_n) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \sum_{k_2=0}^{m_2} ... \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1 k_2 ... k_n} u_1^{k_1} u_2^{k_2} ... u_n^{k_n}$$

называются *многочленами*, а функции $\frac{P(u_1, u_2, ..., u_n)}{Q(u_1, u_2, ..., u_n)}$, где P и $Q-$ многочлены, называются *рациональными дробями* (или *рациональными функциями*) от переменных $u_1, u_2, ..., u_n$.

Композиция рациональных дробей $\frac{P(u_1, u_2, ..., u_n)}{Q(u_1, u_2, ..., u_n)}$ с функциями $u_1 = f_1(x), u_2 = f_2(x), ..., u_n = f_n(x)$, т. е. функции вида

$$\frac{P(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))}{Q(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))},$$

называются *рациональными функциями от функций* $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ и обозначаются $R(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$.

Например, $R(\sin x, \cos x) \equiv \frac{\sin^2 x + \cos x \cos^2 x - \sin x}{-}$ рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$, а $R(\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}) \equiv \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}-$ рациональная функция от $\sqrt{x}$ и $\sqrt[3]{x}$.

21.2 Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right) dx$.

Рассмотрим итеграл $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right) dx$.

Будем предполагать, что числа $r_1, ..., r_n$ рациональны и записаны с одним и тем же знаменателем: $r_i = \frac{p_i}{m}$, где $m-$ натуральное число, p_i целые, $i = 1, 2, ..., n$, и что определитель $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ не равен 0. Если бы $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 0$, то существовали бы такие числа λ, μ, что $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ и $\lambda a + \mu c = 0$, а тогда, например, при $\lambda \neq 0$ имело бы место равенство

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\lambda ax + \lambda b}{\lambda(cx+d)} = \frac{-\mu cx - \mu d}{\lambda(cx+d)} = -\frac{\mu}{\lambda}$$

и, следовательно, функция $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right)$, была бы просто рациональной функцией.

Сделаем в рассмотренном интеграле замену переменной

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d} \tag{21.1}$$

откуда

$$x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} \stackrel{def}{=} p(t). \tag{21.2}$$

Здесь $\mu(t)-$ рациональная функция, поэтому $\mu'(t)-$ также рациональная функция. Поскольку

$$dx = p'(t)dt, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_j} \underset{(21.1)}{=} (t^m)^{p_j/m} = t^{p_j}, j = 1, 2, ..., n,$$

то

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right) dx =$$
$$= \int R(p(t), t^{p_1}, ..., t^{p_n}) p'(t) dt = \int R*(t) dt$$

, где $R*(t) = R(p(t)), t^{p_1}, ..., t^{p_n}) p'(t)-$ рациональные функция.

2.2 Задание 3

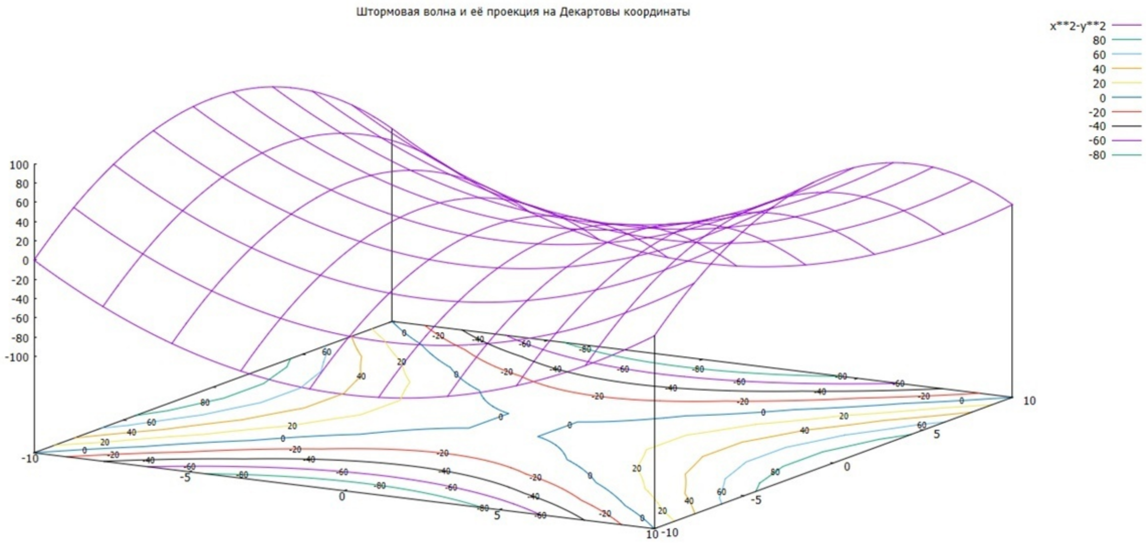

Рис. 1: Пример проекции