Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Герасименко М. С. группа 22104

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

подпись

Итоговая оценка:

оценка

Петрозаводск – 2022

1 Описание работы

В ходе прохождения компьютерной практики по дисциплине "Компьютерные технологии в математике"на протяжении 2 семестра были получены следующие навыки:

1. Работа с текстовым редактором LATEX
   (a) набор математическим формул
   (b) оформление рубрик и специальных абзацев
   (c) создание окружений для оформления лемм, теорем и пр.
2. Работа с графическим редактором gnuplot
   (a) оформление графика математической функции

В результате прохождения практики были выполнены две задачи:

1. написание математического текста (в качестве задания 2)
2. построение графика функции (в качестве задания 3)

содержание задач описано в соответствующих разделах данного отчета.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

6.7. Свойства пределов функций. В пп. 6.7-6.12 все рассматриваемые функции определены на некотором фиксированном множестве $X \subset R$ и x_0 – его точка прикосновения, конечная или бесконечно удалённая.

Функция называется *ограниченной* (сверху или снизу), если множество её значений ограничено (соответственно сверху или снизу).

Теорема 1 *Если функция f имеет в точке x_0 конечный предел, то существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что функция f ограничена на пересечении $X \cap U(x_0)$.*

$\triangleright$Если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a \in R$, то существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для всех $x \in X \cap U(x_0)$ выполняется включение $f(x) \in U(a, 1)$ (здесь в качестве окрестности $U(a)$ в определении 6 взята окрестность $U(a, 1)$), т.е. неравенство $a - 1 < f(x) < a + 1$.$\triangleleft$

Следствие 1 *Если функция f непрерывна в точке x_0, то существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что функция f ограничена на*

$$X \cap U(x_0). \tag{1}$$

Это следует из того, что если функция f непрерывна в точке x_0, то она имеет в этой точке конечный предел.

Лемма 1 *(лемма о сохранении знака). Если функция f имеет в точке x_0 не равный нулю конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \neq 0$, то существуют такие окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и число $c > 0$, что для всех точек $x \in X \cap U(x_0)$ выполняются неравенства*

$$f(x) > c, a > 0; f(x) < -c, a < 0 \tag{2}$$

$\triangleright$ Поскольку $a \neq 0$, то $\frac{|a|}{2} > 0$. Возьмём в качестве окрестности $U(a)$ в определении 6 окрестность $U(a, \frac{|a|}{2})$. тогда согласно этому определению существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для всех точек $x \in X \cap U(x_0)$ выполняется включение $f(x) \in U(a, \frac{|a|}{2})$, т. е. справедливо неравенство

$$a - \frac{|a|}{2} < f(x) < a + \frac{|a|}{2}. \tag{3}$$

Отсюда имеем при $a > 0$

$$f(x) > a - \frac{|a|}{2} = \frac{a}{2} > 0, \tag{4}$$

а при $a < 0$

$$f(x) < a + \frac{|a|}{2} = -|a| + \frac{|a|}{2} = -\frac{|a|}{2} < 0. \tag{5}$$

Таким образом, неравенства 2 выполняются при $c = \frac{|a|}{2}$. $\triangleleft$

Следствие 2 *Если функция f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то существуют такие окрестность $U(x_0)$ точки x_0 и постоянная $c > 0$, что для всех $x \in X \cap U(x_0)$ точки x_0 выполняются неравенства:*

$$f(x) > c, f(x_0) > 0; f(x) < -c, f(x_0) < 0. \tag{6}$$

Это сразу вытекает из свойства 1, поскольку непрерывность в точке x_0 означает существование у функции f в точке x_0 конечного предела, равного $f(x_0)$. В качестве c можно взять $\frac{|f(x_0)|}{2}$.

Замечание. Если у функции f в точке x_0 существует один из бесконечных пределов ∞, $+\infty$ и -∞, то для любого числа $c > 0$ существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для любой точки $x \in X \cap U(x_0)$ выполняются неравенства:

$$|f(x)| > c, \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty f(x) > c, \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty f(x) < -c, \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \tag{7}$$

Это следует из определения 5 предела функции, в котором в качестве окрестности $U(a)$ бесконечно удаленной точки в этом случае следует взять окрестность $U(a, \frac{1}{c})$.

Теорема 2 *Если $f(x) = c$ – постоянная, $x \in X$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$*

Это означает, в частности, что постоянная функция является непрерывной.

Теорема 3 *Если $f(x) \geq a, x \in X$ и существует конечный или определённого знака бесконечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geq a$*

Теорема 4 *Если $\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x), x \in X$ и существуют конечные или определённого знака бесконечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0} \phi(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x)$ и они равны между собой, то сууществует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \phi(x) = \lim_{x \to x_0} \psi(x). \tag{8}$$

Теорема 5 *Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, то существуют и конечные пределы*

$$\lim_{x \to x_0} [\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda \lim_{x \to x_0} f(x) + \mu \lim_{x \to x_0} g(x), \lambda \in R, \mu \in R \tag{9}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x), \tag{10}$$

а если $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, то и

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} \tag{11}$$

В последнем случае функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ рассматривается только для тех x, для которых $g(x) \neq 0$ (см. свойство 2).

$\triangleright$ Утверждения 3-6 следуют из соответствующих утверждений для пределов последовательностей (см. пп. 5.3, 5.6) Докажем, например, формулу 10. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in R$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b \in R$. Возьмём какую-либо последовательность $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, имеющую своим пределом x_0. Тогда согласно определению 1 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x_n) = a$, $\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = b$, поэтоу в силу свойства пределов последовательностей (свойство 5 в п. 5.6)

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n)g(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) \lim_{n \to \infty} g(x_n) = ab, \tag{12}$$

и поскольку последовательность $\{x_n\}$ является произвольной последовательностью такой, что $x_n \to x_0$ и $x_n \in X, n = 1, 2, \ldots$, то согласно тому же определению 1 предела функции получим

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = ab = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x). \triangleleft \tag{13}$$

Следствие 3 *Если функции f и g непрерывны в точке $x_0 \in X$, то функции $\lambda f(x) + \mu g(x)$, $\lambda \in R$, $\mu \in R$, $f(x)g(x)$, а если $g(x_0) \neq 0$, то и $\frac{f(x)}{g(x)}$, непрерывны в точке x_0.*

$\triangleright$ Докажем, например, непрерывность произведения $f(x)g(x)$. Если функции f и g непрерывны в точке x_0, то в этой точке они имеют конечные пределы $f(x_0)$ и $g(x_0)$. Поэтому согласно формуле (6.18) получим

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0)g(x_0). \tag{14}$$

Это и означает непрерывность произведения $f\ g$. $\triangleleft$

Отметим, что произведённое доказательство можно было бы и не проводить, так как непрерывность функции в точке означает, что (см. п. 6.2) эта точка принадлежит множеству задания функции и что у функции в этой точке существует предел по указанному множеству. Поскольку функции f и g заданы в точке x_0, то, очевидно, и функции $\lambda f(x) + \mu g(x)$, $f(x)g(x)$, а при $g(x_0) \neq 0$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$, заданы в этой точке. В силу свойства 6, когда точка , в которой рассматривается предел, принадлежит области определения функций.

2.2 Задание 3