Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнила:
Ефимова А. А. группа 22104

____
подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2022

Содержание

42 Описание работы

В ходе прохождения компьютерной практики по дисциплине "Компьютерные технологии в математике"на протяжении 2 семестра были получены следующие навыки:

1. Работа с текстовым редактором LATEX
   (a) набор математическим формул
   (b) оформление рубрик и специальных абзацев
   (c) создание окружений для оформления лемм, теорем и пр.
2. Работа с графическим редактором gnuplot
   (a) оформление графика математической функции

В результате прохождения практики были выполнены две задачи:

1. написание математического текста (в качестве задания 2)
2. построение графика функции $z = x^2 - y^2$ (в качестве задания 3)

содержание задач описано в соответствующих разделах данного отчета.

43 Результаты работы

43.1 Задание 2

§41. Условный экстремум

43.2 Прямой метод отыскания точек условного экстремума.

Пусть на множестве $X \subset R^n$ задано $m+1$ функций $f_0, f_1, \ldots, f_m$,и пусть X_0 – подмножество множества X, на котором помледние m функций одновременно обращаются в нуль:

$$X_0 = \{x \in X : f_1(x) = \ldots = f_m(x) = 0\}$$

Уравнения

$$f_1(x) = 0, \ldots, f_m(x) = 0 \tag{41.1}$$

называются *уравнениями связи.*

Определение 1 Точка $x^{(0)} \in X_0$ называется *точкой условного* или *относительного экстремума* функции f_0 при выполнении ксловий связи (41.1), если она является точкой обычного экстремума сужения функции f_0 на множестве X_0

Точка условного экстремума может быть либо точкой условного(строго) максимума, либо точкой условного(строго) минимума.

Если $x^{(0)}$ – точка услоного экстремума функции f^0, то говорят, что функция f_0 имеет в этой точке условной экстремум.

Пример.Рассмотрим функцию $f(x, y) = y^2 - x^2$ (рис.145). Она не имеет обычных эксремумов.

При уравнении связи $y = 0$ имеем $f(x, 0) = -x^2$. Эта функция имеет максимум при $x = 0$. Следовательно, точка $(0, 0)$ является точкой условного эксремума функции $f(x, y) = y^2 - x^2$ при уравнении связи $x = 0$

Если в качестве уравнения связи взять уравнение $y = x + 1$, то $f(x, x + y) = (x + 1)^2 - x^2 = x2 + 1$. Эта функция не имеет экстремумов. Поэтому функция $f(x, y) = y^2 - x^2$ не имеет условного эксремума при уравнении связи $y = x + 1$.

Метод, примененный при решений этой задачи, можно применить и в общем случае для изучения условного экстремума.

Пусть все функции $f_0, f_1, \ldots, f_m$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$, а градиенты $\bigtriangledown f_1, \bigtriangledown f_2, \ldots, \bigtriangledown f_m$ последних m функций линейно зависимы в точке $x^{(0)}$, или, что то же самое, ранг матрицы Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{41.2}$$

равен m (отсюда, очевидно, следует, что $m \leqslant n$, так как ранг матрицыне может быть больше числа ее столбцов).

Равенство ранга матрицы (41.2) числу m равносильно существованию у нее миноров порядка m, не равного нулю.

Пусть для определенности

$$\left.\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}\right|_{x^{(0)}} = 0$$

и $n > m$. Тогда согласно теореме о неявных функциях, система уравнений 41.1 в некоторой окрестности U точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_1^{(0)})$ в пространстве R^n переменных $x_1, \ldots, x_n$ равносильна заданию m функций

$$\begin{pmatrix} x_1 = \phi(x_{m+1}, \ldots, x_n), \\ \dotfill \\ x_m = \phi(x_{m+1}, \ldots, x_n) \end{pmatrix} \tag{41.3}$$

в некоторой окрестности U точки $\tilde{x}^{(0)}= (x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ в пространстве R^{n-n} переменных $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$.

Иначе говоря, существуют такие окрестности $U = U(x^{(0)})$ и $\widetilde{U}=\widetilde{U}$ $(\tilde{x}^{(0)})$ точек $x^{(0)}$ и $\tilde{x}^{(0)}$ соответственно в пространствах R^n и R^{n-m}, что точка $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ удовлетворяет условию (41.1) огда и только тогда и только тогда, когда она имеет вид $(\varphi_1(\widetilde{x}), \ldots, \varphi_m(\widetilde{x}), x_{m+1}, \ldots, x_n)$, $\widetilde{x}= (x_{m+1}, \ldots, x_n) \in U$.

Определим функцию $\widetilde{f}_0\ (\widetilde{x}), \widetilde{x}= (x_{m+1}, \ldots, x_n)$, как результат подстановки выражений (41.3) для переменных $x_1, \ldots, x_n$ в $y = f_0(x_1, \ldots, x_n)$, т.е.

$$\widetilde{f}_0\ (\widetilde{x}) =\widetilde{f}_0\ (x_{m+1}, \ldots, x_n) \overset{def}{=} f_0(\varphi_1(\widetilde{x}), \ldots, \varphi_m(\widetilde{x}), x_{m+1}, \ldots, x_n).$$

Функция $\widetilde{f}_0\ (\widetilde{x})$ определена в вышеуказанной фокрестности $\widetilde{U}$ точки $\tilde{x}^{(0)}$.

Ввиду равносильности условий (41.1) и (41.3) точка $x^{(0)}$ является точкой условного экстремума для функций f_0 при выполнении уравнений связи (41.1) тогда и только тогда, когда точка $\tilde{x}^{(0)}$ является точкой обычного экстремума для фунция $\tilde{f}_0$.

Затруднение при практическом использовании изложенного метода сведения задачи отыскания точек условного экстремума к задаче отыскания точек обычного экстремума состоит в том, что решение системы уравнений (41.1) не выражается через элементарные функции даже во многих простейших случаях. В следующем пункте будет изложен метод отыскания точек условного экстремума, значительно более удобный для применения

43.3 Метод неопределенных множителей Лагранжа.

Теорема 1 *Пусть функция $f_0, f_1, \dots, f_m$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $x^{(0)} \in R^n, n > m$. Если $x^{(0)}$ является точкой условного экстремума функции f_0 относительно уравнений связи (41.1), то в этой градиенты $\nabla f_0, \nabla f_1, \dots, \nabla f_m$ линейно зависимы, т.е. существуют такие числа λ_j, $j = 0, 1, \dots, m$, одновременно не равные нулю, что*

$$\lambda_0 \nabla f_0 + \lambda_1 \nabla f_1 + \dots + \lambda_m \nabla f_m = 0. \tag{41.4}$$

Следстие 1 *Если в точке $x^{(0)}$ условного экстремума функции f_0 относительно уравнений связи (41.1) градиенты $\nabla f_1, \dots, \nabla f_m$ линейно независимы, то существуют такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, что*

$$\nabla f_0 + \lambda_1 \nabla f_1 + \dots + \lambda_m \nabla f_m = 0, \tag{41.5}$$

или, в координатной форме,

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n. \tag{41.6}$$

Существование множителей $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ в теореме 1 (соответственно множителей $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ в ее следствии) является необходимым условием для точки относительного экстремума $x^{(0)}$ функции f_0 при выполнении уравнений связи (41.1). Если градиенты $\nabla f_1, \dots, \nabla f_m$ линейно независимы, то функция

$$F(x) = f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_m f_m(x), \tag{41.7}$$

где числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ удовлетворяют условию (**??**), называется *функцией Лагранжа*, а сами числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$-*множителями Лагранжа.*

Условие (41.6) означает, что $\nabla F = 0$, или, в координатной записи,

$$\frac{\partial F(x^{(0)})}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, \ldots, n, \tag{41.8}$$

иначе говоря,

$$dF(x^{(0)}) = 0. \tag{41.9}$$

Таким образом, точка $x^{(0)}$ является стационарной точкой функции Лагранжа.

$\lhd$ Пусть точка $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ удовлетворяет уравнениям связи (41.1):

$$f_k(x^{(0)}) = 0, k = 1, 2, \ldots, m \tag{41.10}$$

и в ней градиенты $\nabla f_0, \nabla f_1, \ldots, \nabla f_m$ линейно независимы. Покажем, что в этом случае точчка $x^{(0)}$ не может быть точой условного экстремума

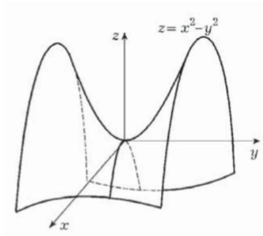

Рис. 145

43.4 Задание 3