Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Ефимов Я. Н. группа 22104

____

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____

подпись

Итоговая оценка:

____

оценка

Петрозаводск – 2022

Содержание

1 Описание работы

В ходе прохождения компьютерной практики по дисциплине "Компьютерные технологии в математике"на протяжении 2 семестра были получены следующие навыки:

1. Умение работать с текстовым редактором LATEX
    (a) набор математическим формул.
    (b) рубрикациия текста и специальных абзацев.
    (c) оформление новых окружений (теоремы, леммы и пр.) и команд.
2. Работа с графическим редактором gnuplot
    (a) оформление графика математической функции

В результате прохождения практики были выполнены две задачи:

1. написание математического текста (в качестве задания 2)
2. построение графика функции $y = sgn(x)$ (в качестве задания 3)

содержание задач описано в соответствующих разделах данного отчета.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

что приращение Δz функции f в точке (x_0, y_0) имело бы вид

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \tag{1}$$

$\triangleright$ 1. Пусть имеет место равенство (36.6). При $p \neq 0$ имеем

$$\epsilon p = \epsilon\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \epsilon\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\Delta x + \epsilon\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\Delta y$$

Положим

$$\epsilon_1 = \epsilon_1(\Delta x, \Delta y)\begin{cases} \frac{\Delta x}{p}, & p \neq 0 \\ 0, & p = 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_2(\Delta x, \Delta y)\begin{cases} \frac{\Delta y}{p}, & p \neq 0 \\ 0, & p = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Тогда для всех $p \geqslant 0$

$$\epsilon p = \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \tag{4}$$

а так как

$$\frac{|\Delta x|}{p} \leqslant 1, \quad \frac{|\Delta y|}{p} \leqslant 1, \quad p \neq 0 \tag{5}$$

то для всех $p \geqslant 0$

$$|\epsilon_1| \leqslant |\epsilon|, \quad |\epsilon_2| \leqslant |\epsilon|,$$

и, следовательно, в силу условия (36.4) выполняются условия (36.8). Подставив выражение (4) в формулу (36.6), получим (1).

2. Пусть имеет место равенство (1). Преобразуем два последних слагаемых в правой части этого равенства следующим образом:

$$\epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y = \left(\epsilon_1 \frac{\Delta x}{p} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{p}\right) p, \quad p \neq 0$$

Положим

$$\epsilon_1 = \epsilon_1(\Delta x, \Delta y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \epsilon_1 \frac{\Delta x}{p} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{p}, & \text{если } p \neq 0 \\ \quad 0, & \text{если } p = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Тогда для всех p получим равенство $\epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y = \epsilon p$, т.е. снова равенство (4), в котором при $p \neq 0$ для функции $\epsilon = (\Delta x, \Delta y)$ справедлива следующая оценка

$$|\epsilon| = \left|\epsilon_1 \frac{\Delta x}{p} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{p}\right| \leqslant |\epsilon_1| \frac{|\Delta x|}{p} + |\epsilon_2| \frac{|\Delta y|}{p} \underset{5}{\leqslant} |\epsilon_1| + |\epsilon_2|$$

Из условия $\epsilon(0,0) = 0$ следует, что полученное неравенство $|\epsilon| \leqslant |\epsilon_1| + |\epsilon_2|$ справедливо и при $p = 0$ (оно превращается в равенство $0 = 0$), поэтому $\lim\limits_{p \to 0} \epsilon_1(\Delta x, \Delta y) \underset{36,8}{=} 0$. Подставив выражение (4) в формулу (1) получим (36.6). $\triangleleft$

Выясним теперь свойства функции, которые следуют из ее дифференцируемости.

Теорема 1 *Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.*

▷ В самом деле, если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то

$$\lim_{p \to 0} \Delta z \underset{36,6}{=} \lim_{p \to 0} [A\Delta x + B\Delta y + \epsilon(\Delta x, \Delta y)p] = 0. \quad \triangleleft$$

Теорема 2 *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то в этой точке существуют частные производные функции f по x и по y, причем, если $dz = Adx + Bdy$ — дифференциал функции в точке (x_0, y_0), то*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = B, \tag{7}$$

Таким образом, дифференциал (36.7) можно записать в виде

$$dz \underset{(36,7)(7)}{=} \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

▷ Если функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0), то, положив в формуле (1) $\Delta y = 0$, получим

$$\Delta_x z = A\Delta x + \epsilon_1 \Delta x, \tag{8}$$

где $\Delta_x z$ - приращение функции f по переменной x в точке (x_0, y_0), и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \epsilon_1 = 0 \tag{9}$$

ибо в этом случае $p = |\Delta x|$.

Следовательно, существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \underset{(8)}{=} \lim_{\Delta x \to 0} (A + \epsilon_1) \underset{(9)}{=} A,$$

т.е. существует частная производная по x функции f в точке (x_0, y_0), и

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = A.$$

Аналогично доказывается существование производной $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ и ее равенство числу B. ◁

Замечание 1. Функция, имеющая в некоторой точке частныепроизводные, может быть недифференцируемой в этой точке. Примером такой функции является функция, рассмотренная в конце п. 36.1. Она имеет в точке $(0, 0)$ частные производные, но не является в ней непрерывной и тем более дифференцируемой, так как из дифференцируемости следует непрерывность (теорема 1). Однако если у функции потребовать не только существование, но и непрерывность ее частных производных, то такая функция окажется уже дифференцируемой.

Теорема 3 *Если функция имеет в окрестности точки частные производные и они непрерывны в этой точке, то функция в ней дифференцируема.*

$\triangleright$ Пусть функция f задана в δ-окрестности U точки (x, y), имеет в этой окрестности частные производные f_x, f_y, непрерывные в точке (x, y). Заметим, что если $p = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$, то отрезки с концами в точках $(x, y), (x, y + \Delta y)$ и в точках $(x, y + \Delta y)$, $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ целиком лежат в окрестности U, т.е. в множестве задания функции f.

Имеем

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)] \quad (10)$$

В квадратных скобках стоят приращения функций одной переменной (другая переменная фиксирована): в первой скобке приращение по первой переменной, во второй — по второй. Применив к этим приращениям формулу конечных приращений Лагранжа (см. п. 12.2), получим

$$\Delta f \underset{(10)}{=} f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y)\Delta x + f_y(x, y + \theta_2 \Delta y)\Delta y, \quad (11)$$

$$0 < \theta_1 < 1, \quad 0 < \theta_2 < 1, \quad (12)$$

значения θ_1 и θ_2 зависят, конечно, от приращений Δx и Δy. Важным для дальнейшего является то обстоятельство, что в силу условия (12) при $p = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$ точки $(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y)$ и $(x, y + \theta_2 \Delta y)$ имеют свои пределом точку (x, y).

Частные производные f_x и f_y непрерывны по условию в точке (x, y), поэтому

$$\lim_{p \to 0} f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f_x(x, y), \quad \lim_{p \to 0} f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f_x(x, y). \quad (13)$$

Следовательно, если

$$\epsilon_1 = f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) - f_x(x, y), \epsilon_2 = f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) - f_x(x, y). \quad (14)$$

2.2 Задание 3