Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:

Дьяченко А. П. группа 22103

____

подпись

Руководитель практики:

к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____

подпись

Итоговая оценка:

____

оценка

Петрозаводск, 2022 г.

Содержание

1 Описание работы

Первое задание обучает основным принципам написания работ на LaTeX и его последующей трансляции в pdf-вариант. В это же время, я научился подключать пакеты, настраивать начертания, а также использовать некоторые спецсимволы и делить текст на абзацы.

Во втором задании требовалось создать копию трёхстраничного отрывка из учебника Кудрявцева Л. Д. *"Краткий курс математического анализа"* I том. Для успешного выполнения данной работы я пользовался учебным пособием *"Работа в системе LaTeX"*, а также такими интернет-ресурсами как **"Хабр", "Stack Exchange"** и др.

Последняя задача нацелена на ознакомление с интерпретатором команд Gnuplot для построения чертежа и его последующей вставкой в документ. Во время выполнения, я пользовался только материалами официального сайта Gnuplot.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

ный предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$*; то существует и предел* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$*, причём*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{13.3}$$

$\triangleright$ Доопределим функции f и g в точке $x=a$ по непрерывности, т.е. положим

$$f(a)=g(a)=0. \tag{13.4}$$

Тогда для любого $x\in(a,b)$ продолженные функции на отрезке $[a,x]$ будут удовлетворять условиям теоремы Коши о среднем значении, и потому будет существовать такая точка $\xi=\xi(x), a<\xi<x$, что

$$\frac{f(x)}{g(x)}\overset{(13.4)}{=}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{13.5}$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to a}\xi(x)=a$ и предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ существуют, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{13.6}$$

и, следовательно, существует

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{(13.5)}{=}\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\overset{(13.6)}{=}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad \triangleleft$$

13.2 Неопределённости вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема 3 . *Если:*

1. *функции f и g дифференцируемы на интервале (a,b);*
2. *$g'(x)\neq 0$ для всех $x\in(a,b)$ и*

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty; \tag{13.7}$$

3. *существует конечный или бесконечный предел* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$*; то существует предел* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ *и*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{13.8}$$

$\triangleright$ Пусть существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k. \tag{13.9}$$

Покажем, что при выполнении остальных условий теоремы

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k. \tag{13.10}$$

Если $a < x < x_0 < b$, то на отрезке $[x, x_0]$ функции f и g удовлетворяют условиям теоремы Коши (см. теорему 4 в п. 12.2), а поэтому существует такая точка $\xi = \xi(x_0, x)$, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g(\xi)}, x < \xi < x_0. \tag{13.11}$$

Далее, в силу (13.7) существует такая точка $x_1 = x_1(x_0), a < x_1 < x_0$, что при всех $x \in (a, x_1)$ выполняются неравенства

$$f(x) \neq 0,$$

$$g(x) \neq 0,$$

$$f(x) \neq f(x_0),$$

и, следовательно, можно производить деление на $f(x), g(x)$ и $1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}$ (а также и на $1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}$, поскольку в силу условий теоремы $g(x) \neq g(x_0)$,; см. (12.16) в доказательстве теоремы 4 из п. 12.2). Для этих значений x из (13.11) вытекает равенство

$$\frac{f(x)}{g(x)} \frac{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}} = \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

откуда

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}. \tag{13.12}$$

В правой части равенства первый сомножитель $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ стремится к числу k при $x_0 \to a$ (ибо $a < \xi < x_0$, и поэтому $\lim\limits_{x_0 \to a} \xi = a$), а второй в силу условия (13.7) стремится к 1 при $x \to a$ и фиксированном x_0:

$$\lim_{x \to a} \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} = 1. \tag{13.13}$$

Непосредственно перейти к пределу в равенстве (13.12) нельзя, так как указанные выше предельные переходы в сомножителях в правой части равенства происходят при рназных условиях: при $x_0 \to a$; и при фиксированном x_0, но $x \to a$. Однако если задать произвольно окрестность $U(k)$ предела k отношения производных (13.9), то можно сначала зафиксировать точку x_0 столь близко к точке a, что отношение $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ попадёт в эту окрестность, ибо $a < \xi < x_0$. Согласно же условию (13.13) для всех точек x, достаточно близких к a, отношение $\frac{f(\xi)}{g(\xi)}$ (см. (13.12)) также будет принадлежать указанной окрестности $U(k)$, а это означает справедливость утверждения (13.10).

Проведённое рассуждение нетрудно записать с помощью неравенств.

Пусть сначала предел (13.9) конечный. Положим

$$\alpha(x) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - k. \tag{13.14}$$

Тогда из (13.9) будем иметь $\lim\limits_{x\to a} \alpha = 0$, и, следовательно, для любого произвольно фиксированного $\varepsilon > 0$ существует такое x_0, что для всех $x \in (a, x_0)$ выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13.15}$$

Если положить ещё

$$|\beta(x)| = 1 - \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}, \tag{13.16}$$

то в силу условия (13.7)

$$\lim_{x\to a} \beta(x) = 0. \tag{13.17}$$

Теперь имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} \overset{(13.12),\ (13.14),\ (13.16)}{=} (k + \alpha(\xi))(1 + \beta(x)) = k + \alpha(\xi) + k\beta(x) + \alpha(\xi)\beta(x), \tag{13.18}$$

$x < \xi < x_0$; при этом в силу (13.17) существует такое $\delta > 0, a < a + \delta < x_0$, что при $x \in (a, a+\delta)$ выполняется неравенство

$$|k\beta(x) + \alpha(\xi)\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13.19}$$

В результате получаем, что для всех $x \in (a, a+\delta)$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - k\right| \overset{(13.18)}{\leqslant} |\alpha(\xi)| + |k\beta(x) + \alpha(\xi)\beta(x)| \overset{(13.15),\ (13.19)}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

а это и означает выполнение равенства (13.10).

Если теперь

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty \tag{13.20}$$

2.2 Задание 3

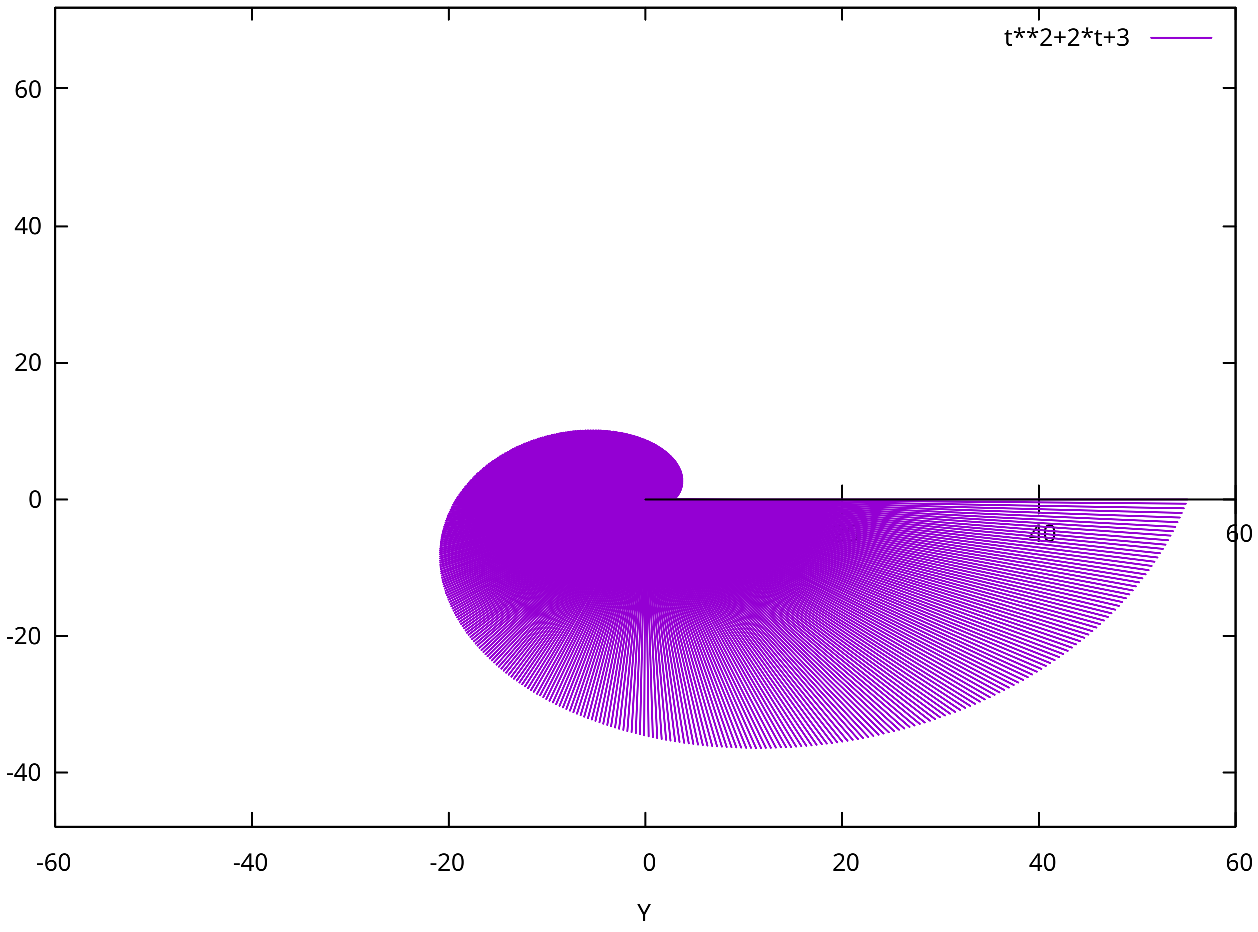

Рис. 1: График параболы в полярных координатах