Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Белонин П. А. группа 22104

____
подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская
____
подпись

Итоговая оценка:
____
оценка

Петрозаводск – 2022

Содержание

1 Описание работы **3**

2 Результаты работы **4**
2.1 Задание 2 4
2.2 Задание 3 6

1 Описание работы

В ходе прохождения обучения компьютерной практики по дисциплине "Компьютерные технологии в математике"на протяжении второго семестра были получены следующие навыки:

1. Умение работать с текстовым редактором LATEX
   (a) набор математических формул и символов.
   (b) рубрикациия текста и специальных абзацев.
   (c) оформление новых окружений (теоремы, леммы и пр.) и команд.
2. Работа с графическим редактором gnuplot
   (a) оформление графика математической функции

В результате прохождения практики были выполнены две задачи:

1. написание математического текста (в качестве задания 2)
2. построение графика функции $y = cos(x)$ (в качестве задания 3)

содержание задач описано в соответствующих разделах данного отчета.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

поскольку $||x_n| - |a|| \le |x_n - a|$, то выполняется и неравенство

$$|||x_n| - |a|| < \epsilon,$$

а это и означает выполнение равенства (5.37).$\triangleleft$

2^o. *Конечная линейная комбинация сходящихся последовательностей также является содящейся последовательностью, и ее предел равен такой же линейной комбинации пределов данных последовательностей.*

$\triangleright$ Пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbf{R}, \lim_{n\to\infty} y_n = b \in \mathbf{R} \tag{1}$$

Тогда в силу необходимости условий (5.36) для существования соответсвующих конечных пределов челены последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ можно представить в виде

$$x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n, n = 1, 2, ..., \tag{2}$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ бесконечно малые:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0 \tag{3}$$

Пусть теперь λ и μ - какие-либо числа. Тогда члены последовательности $\{\lambda x_n + \mu y_n\}$ представимы в виде

$$\lambda x_n + \mu y_n = \lambda a + \mu b + \lambda\alpha_n + \mu\beta_n, n = 1, 2, ..., \tag{4}$$

где последовательность $\{\alpha_n + \mu\beta_n\}$ в силу бесконечной малости последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ также бесконечная малая (см.свойство 1 бесконечно малых последовательностей в п.5.5):

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n) = 0 \tag{5}$$

Поэтому в силу достаточности условий (5.36) для существования соответствуюшего конечного предела из равенств (4) следует, что последовательность $\{\lambda x_n + \mu y_n\}$ имеет предел, равный $\lambda a + \mu b$:

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda a + \mu b$$

или (см. (1))

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} x_n + \mu \lim_{n\to\infty} y_n. \tag{6}$$

Соответсвующее утверждение для любой конечной линейной комбинации сходящихся последовательностей получается из доказанного методом математической индукции.$\triangleleft$

3^o. *если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то их произведение $\{x_n y_n\}$ также сходится:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n, \tag{7}$$

т.е. предел произведения сходящихся последовательностей существует и равен произведению пределов данных последовательностей. $\triangleright$ Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbf{R}, \lim_{n\to\infty} y_n = b \in \mathbf{R}$; тогда $x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n, n = 1, 2, ...,$ где $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$. Поэтому

$$x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n\beta_n), \tag{8}$$

причем последовательность $\{b\alpha_n + a\beta_n\}$ бесконечно малая как линейная комбинация бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$, а последовательность $\{\alpha_n\beta_n\}$ бесконечно малая как произведение тех же последовательностей, поэтому бесконечно малой является и их сумма $\{b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n\beta_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty}\{b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n\beta_n\} = 0. \tag{9}$$

Из равенств (8) и (9) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n \triangleleft$$

С л е д с т в и е. *Если последовательность* $(\{x_n\})$ *сходящаяся и* m *- натуральное число, то*

$$\lim_{n\to\infty} x_n^m = (\lim_{n\to\infty} x_n)^m.$$

Это непостредственно следует из свойства 3^o, так как возведение числа в целую положительную степень m сводится к повторному умножению на это число m раз.

4^o. *Если последовательности* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *сходятся, для всех номеров* n *имеет место неравенство*$y_n \neq$ *и* $(\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0)$, *то последовательность* $\{\frac{x_n}{y_n}\}$ *сходится, причем*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n},$$

т.е. при сделаных предположениях предел частного сходящихся последовательностей существует и равен частному от пределов данных последовательностей.

$\triangleright$ Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbf{R}, \lim_{n\to\infty} b \in \mathbf{R}, b \neq 0, y_n \neq 0, n = 1, 2, ...$ Тогда $x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n, \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$. Из условия $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ согласно свойству 1^o следует, что $\lim_{n\to\infty} |y_n| = |b|$. Поскольку |b|>0 (ибо $b \neq 0$) и $0 < |b|/2 < |b|$, то согласно следствию 1 и свойства 3^o пределов последовательностей (п. 5.3) существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|y_n| > |b|/2$ и, следовательно неравенство

$$\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|b|} \tag{10}$$

(поскольку все $y_n \neq 0$, то на y_n можно днлить).

Теперь имеем

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b(b + \beta_n)}(b\alpha_n - a\beta_n). \tag{11}$$

Здесь последовательность

$$\{\frac{1}{b(b + \beta_n}\}$$

ограничена, ибо для всех $n > n_0$ выполняется неравенство

$$|\frac{1}{b(b + \beta_n)}| = \frac{1}{|b||y_n|} < \frac{2}{|b|^2},$$

а последовательность $\{b\alpha_n - a\beta_n\}$ бесконечно малая как линейная комбинация бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$. Поэтому бесконечно малой является и последовательность

$$\{\frac{1}{b(b + \beta_n)}(b\alpha_n - a\beta_n)\}$$

как произведение ограничаенной последовательности на бесконечно малую.

Следовательно, из равенства (11) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n} \triangleleft$$

5.7. Монотонные последовательности

Теорема 1 *Верхняя (нижняя) грань множества значений числовой последовательности* $\{x_n\}$ *называется верхней (нижней) грнаью этой последовательности и обозначается* $sup\{x_n\}$ *(соответственно* $inf\{x_n\}$*).*

Иначе говоря, если $x_n \in R, n = 1, 2, ...,$ и если $\beta = sup\{x_n\}$, то:
1) для всех $n \in N$ имеет место неравенство $x_n < \beta$;
2) для любого $\beta' < \beta$ существует такое $n_0 \in N$, что $x_{n0} > \beta'$.
Аналогично, если $\alpha = inf\{x_n\}$, то:
1) для всех $n \in N$ имеет место неравенство: $x_n > \alpha$;
2) для любого $\alpha' > \alpha$ существует такое $n_0 \in N$, что $x_{n0} < \alpha'$.
П р и м е р ы.
1.$sup\{\frac{1}{n}\} = 1, inf\{\frac{1}{n}\}$.
2. $sup\{n\} = \infty, inf\{n\} = 1$.

Теорема 2 *Числовая последовательность* $\{x_n\}$ *называется возрастаюшей (убывающей), если для всех* $n \in N$ *выполняется неравенство* $x_n < x_n + 1$ *(соответственно неравенство* $x_n > x_n + 1$*).*

Возрастающая(убывающая) последовательность обозначается $x_n \uparrow$ (соответственно $x_n \downarrow$). если возрастающая (убывающая) последовательность имеет предел, равный , то пишут $x_n \uparrow a$ (соответственно $x_n \downarrow a$)

2.2 Задание 3

Пример функции косинуса