Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Бельков Н.В. группа 22101

____
подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2022

Содержание

1 Описание работы

На данной учебной практике я изучил издательскую систему Latex, освоил инструменты набора и трансляции математических текстов. Также я овладел системой Gnuplot и инструментами для построения научных графиков в ней. В задании 2.1 мне необходимо было подготовить документ, содержащий математический текст, при работе в системе Latex я научился набору математических формул (получил знания об основных видах формул, команд для расположения их в тексте и спецзнаках, которые используются для их написания), о рубрикации текста и специальных абзацах (команды создания разделов, отдельных абзацев и их нумерации), а также об оформлении новых окружений (команды для создания теорем, лемм и др.). В задании 2.2 я должен был построить изображение кривой в декартовых координатах с помощью системы Gnuplot, а затем разместить его в файле с предыдущим заданием. Я разобрался с командами для построения графиков и окружением для их вставки в документ типа .tex

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

Следствие. *Если функция f возрастает на множестве X, $x_0 \notin X$, множества $X_-(x_0), X_+(x_0)$ не пусты и точка x_0 является их точкой прикосновения, то функция f имеет в этой точке конечные пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$, причем*

$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0 + 0) \tag{1}$$

Напомним, что запись $x_0 \to x_0 + 0$ (соответственно запись $x_0 \to x_0 - 0$) означает, что рассматривается предел справа (слева) по множеству, не содержащему точки x_0.
$\triangleright$ Если функция f возрастает на множестве X, то для любых $x' \in X_-(x_0)$ и $x'' \in X_+(x_0)$ выполняется неравенство.

$$f(x') < f(x''). \tag{2}$$

Иначе говоря, возрастающая функция f ограничена числом $f(x")$ сверху на множестве $X_-(x_0)$ и числом $f(x')$ снизу на множестве $X_+(x_0)$. Поэтому согласно теореме 4 существуют конечные пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$. Перейдя к верхней грани в левой части неравенства (2) , получим

$$\sup_{x<x_0} f(x) \leq f(x"),$$

а перейдя здесь в правой части к нижней грани, будем иметь

$$\sup_{x<x_0} f(x) \leq \inf_{x>x_0} f(x), \tag{3}$$

Согласно теореме 4

$$f(x_0 - 0) = \sup_{x<x_0} f(x), f(x_0 + 0) = \inf_{x>x_0} f(x), x \in X$$

Поэтому неравенство (3) совпадает с неравенством (1). $\triangleleft$

Замечание 1. *Теорема, аналогичная теореме 4, справедлива и для убывающих функций.*

Замечание 2. *Если функция f возрастает на множестве X, $\beta = \sup X$ и $\beta \in X$, то предел $\lim x \to \beta$ функции f по всякому X (т. е. включая β) может существовать (рис. 68), тогда функция f будет непрерывна в точке $x = \beta$ (см. п. 6.2), а может и не существовать (рис. 69), тогда точка β будет точкой разрыва функции f. Подчеркнем, однако, что согласно теореме 4 предел $\lim\limits_{x\to\beta-0} f(x)$ всегда существует.*

Предел и непрерывность композиции функций.

Теорема 1. *Пусть функция f задана на множестве X, функция g - на множестве Y и $f(X) \subset Y$. Если существуют конечные или бесконечные пределы*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y0, \tag{4}$$

$$\lim_{y\to y_0} g(y) = z0, \tag{5}$$

то при $x \to x_0$ существует предел (конечный или бесконечный) сложной функции $g[f(x)]$, причем

$$\lim_{x\to x_0} g[f(x)] = \lim_{y\to y_0} g(y). \tag{6}$$

$\triangleright$ Пусть $x_n \to x_0$, $x_n \in X, n = 1, 2, ...$; тогда в силу (4) имеем

$$y_n \overset{def}{=} f(x_n) \to y_0, y_n \in Y, n = 1, 2, ...$$

Поэтому в силу (5) $g(y_n) \to z_0$, но $y_n = f(x_n)$, следовательно, $g[f(x)] \to z_0, n = 1, 2, ...$, т. е. имеет место равенство (6). $\triangleleft$

Замечание 3. *Если функция Y непрерывна в точке y_0, т. е.*

$$\lim -x \to x_0 g(y) = g(y_0), \tag{7}$$

то формулу (6) можно записать в виде

$$\lim_{x\to x_0} g[f(x)] = g(\lim_{x\to x_0} f(x)). \tag{8}$$

Иначе говоря, предельный переход перестановочен с операцией взятия непрерывной функции. В самом деле, согласно теореме 6

$$\lim_{x\to x_0} g[f(x)] \underset{6}{=} \lim_{y\to y_0} g(y) \underset{7}{=} g(y_0) \underset{4}{=} g(\lim_{x\to x_0} f(x)).$$

Отсюда следует, в частности, что непрерывная функция от непрерывной функции непрерывна, точнее:

Следствие. *Если функция f непрерывна в точке x_0, а функция g непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то и их композиция $g \circ f$ непрерывна в точке x_0.*

$\triangleright$ Действительно, непрерывность функции f в точке x_0 означает, что

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = y_0, \tag{9}$$

поэтому в силу непрерывности функции g в точке y_0 из формулы (8) получим

$$\lim_{x\to x_0} g[f(x)] \underset{8}{=} g[\lim_{x\to x_0} f(x)] \underset{9}{=} g(f(x0)),$$

т.е. функция $g \circ f$ непрерывна в точке x_0. $\triangleleft$

Замечание 4. *Обычно, когда говорят, что некоторая функция в данной точке имеет предел, то имеют в виду, что этот предел конечный, а случай бесконечного предела оговаривают особо.*

Предел и непрерывность функций комплексного аргумента. Понятия предела и непрерывности функции обобщаются на случай функций, значениями которых являются комплексные числа и которые заданы на подмножествах множества комплексных чисел.

К таким функциям относятся, например, функции $f(z) = |z|, f(z) = \overline{z}, f(z) = z^2, f(z) = 1/z$. Первые три определены на всей комплексной плоскости C, а последняя - на комплексной плоскости, из которой удалена точка 0; первая принимает только неотрицательные действительные значения, три последние - существенно комплексные.

Итак, будем здесь предполагать, что функция f задана на некотором подмножестве Z множества комплексных чисел C и принимает комплексные значения, т. е. что

$$f(z) \in C, z \in Z \subset C.$$

Комплексное число w_0 называется пределом функции f в точке z_0 (или, что то же самое, при $z \to z_0$), если для любой последовательности комплексных чисел $z_n \in Z, n1, 2, ...$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$(см. п. 5.11), имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = w_0$. В этом случае пишут $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$.
В терминах окрестностей точек на комплексной плоскости (п. 5.11) это определение равносильно следующему.
Комплексное число w_0 называется пределом функции f в точке z_0, если для любой окрестности V точки w_0 существует такая окрестность U точки z_0, что

$$f(U \cap Z) \subset V.$$

На языке "$\epsilon - \delta$" это означает следующее: для любого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $z \in Z$, для которых $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(z) = w0| < \epsilon.$$

Доказательство эквивалентности двух сформулированных определений предела функции комплексного переменного - в терминах последовательностей и в терминах окрестностей - проводится аналогично случаю функций действительного аргумента, принимающих действительные значения. При рассмотрении предела функции f в точке z_0 возможны два случая: z_0 принадлежит множеству Z, на котором задана функция f, или не принадлежит ему. Если $z_0 \in Z$, то существование предела функции f в точке z_0 означает, что

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

2.2 Задание 3

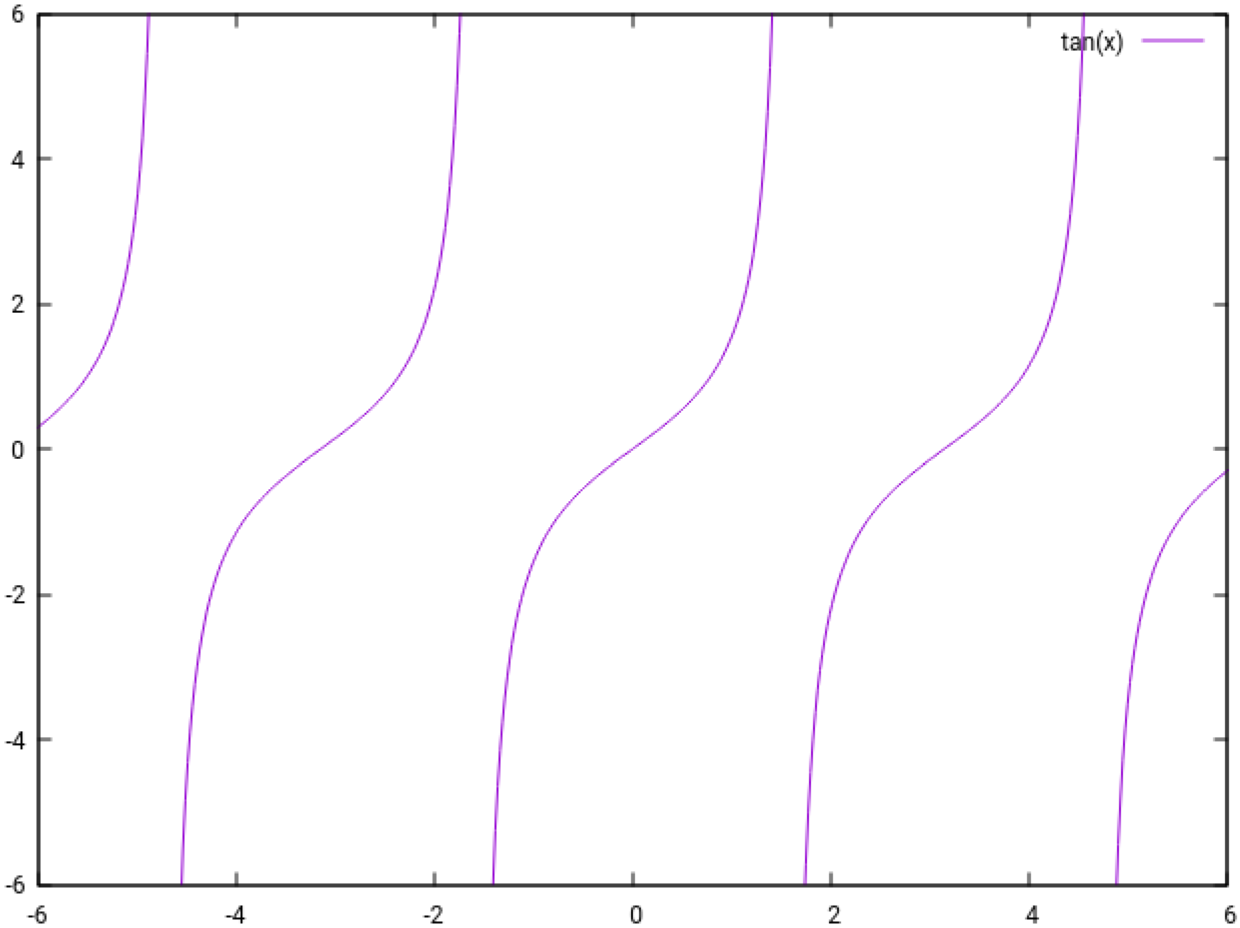

Рис. 1: $tan(x)$